الجمهورية العربية السورية النموذج الثاني

وزارة التربية الدرجة العظمى : ستمئة

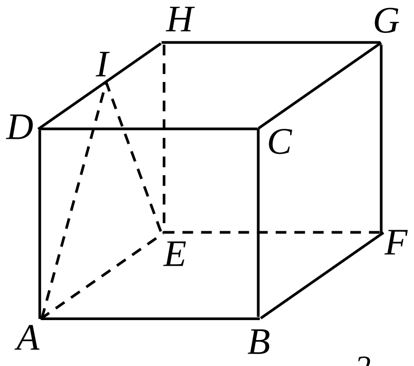
المركز الوطني لتطوير المناهج التربوية المدة : ثلاث ساعات

نموذج امتحان لمادة الرياضيات الصف الثالث الثانوي العلمي (المنهاج الجديد 2017)

أولاً – أجب عن الأسئلة الأربعة الآتية : (40° لكل سؤال)

السؤال الأول : نجد جانباً مكعباً طول ضلعه 1 . مزوداً بمعلم متجانس $(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AD})$

حيث I هي منتصف $[DH]$:



1) أعط إحداثيات النقاط I و E و A .

2) جد إحداثيات O مركز ثقل المثلث AEI .

3) أين تقع النقطة M التي تحقق $3\overrightarrow{FM}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{EO}$ ؟

4) احسب $\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IE}$

السؤال الثاني : ليكن f التابع المعرف على $D=R\setminus\{-1\}$ وفق : $f(x)=\dfrac{x^2-5x+1}{x+1}$

1) جد الأعداد a و b و c التي تحقق $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x+1}$ أياً يكن x من D .

2) احسب $I=\int_0^2 f(x)\,dx$.

السؤال الثالث : ليكن z عدداً عقدياً ما , وليكن w عدداً عقدياً طويلته تساوي الواحد وهو مختلف عن الواحد .

أثبت أن $\dfrac{w\bar{z}-z}{iw-i}$ تخيلي بحت .

السؤال الرابع : احسب مشتق التابع f المعرف على R وفق : $f(x)=e^{1-\sin x}$

ثانياً – حل التمارين الأربعة الآتية : (60° لكل تمرين)

التمرين الأول : ليكن f التابع المعرف على R وفق : $f(x)=\dfrac{x^2+|x|}{x^2+1}$

1) ما نهاية التابع f عند $-\infty$ ؟

2) ادرس قابلية اشتقاق f عند الصفر من اليمين , ثم اكتب معادلة لنصف المماس من اليمين لخطه البياني C_f في النقطة $A(0,0)$.

التمرين الثاني : لتكن $(x_n)_{n\geq 0}$ المتتالية المعرفة وفق العلاقة $x_{n+1}=\dfrac{6}{5}x_n+\dfrac{4}{5}\,,\,x_0=5$

1) احسب x_1,x_2,x_3 ثم ادرس اطراد المتتالية .

2) نعرف $(y_n)_{n\geq 0}$ بالعلاقة $y_n=x_n+4$. أثبت أن $(y_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية .

3) اكتب y_n بدلالة n . ثم احسب $y_2+y_3+\dots\dots+y_{10}$ بدلالة قوة للعدد $\dfrac{6}{5}$.

تابع في الصفحة الثانية

<u>التمرين الثالث</u> : في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, لدينا نقطتين $A(2,-1,0)$ و $B(-1,3,5)$

والمستوي P الذي يقبل معادلة $2x-3y+z-5=0$

1) أثبت أن المستقيم (AB) يقطع المستوي P في نقطة C يطلب تعيين إحداثياتها .

2) اكتب معادلة للمستوي Q العمودي على P ويمر بالنقطتين A و B .

<u>التمرين الرابع</u> : يحتوي صندوق على أربع كرات زرقاء , وثلاث كرات خضراء , وواحدة بيضاء

نسحب عشوائياً معاً <u>ثلاث كرات</u> من الصندوق .

ليكن X المتحول العشوائي الذي يمثل عدد الألوان المختلفة بين الكرات المسحوبة

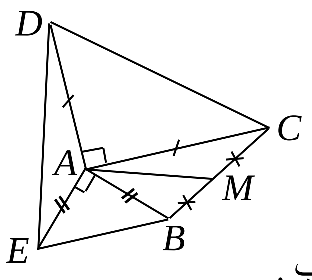
1) ما هي مجموعة القيم التي يأخذها X ؟

2) احسب كلاً من $P(X=1)$ و $P(X=3)$ ثم استنتج قيمة $P(X=2)$.

3) احسب توقع X وانحرافه المعياري .

ثالثاً – <u>حل المسألتين الآتيتين</u> : (°100 لكل مسألة)

<u>المسألة الأولى</u> : نتأمل في المستوي مثلثاً ABC مباشر التوجيه كيفياً .



لتكن M منتصف $[BC]$, وليكن AEB و ACD مثلثين قائمين في A

ومتساويي الساقين مباشرين . نختار معلماً مباشراً مبدأه النقطة A .

ونرمز بالرمزين b و c إلى العددين العقديين اللذين يمثلان النقطتين B و C

1) احسب بدلالة b و c الأعداد العقدية e و d و m الممثلة للنقاط E و D و M بالترتيب .

2) احسب $\dfrac{d-e}{m-a}$ ثم استنتج أن (AM) هو ارتفاع في المثلث AED وأن $ED=2AM$

3) نفترض أن A هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(D,2)$ و $(E,3)$ و $(C,1)$ و $(B,1)$.

احسب $\dfrac{c}{b}$, ثم احسب قياس الزاوية BAC .

<u>المسألة الثانية</u> : ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $]-\infty,-2[\cup]0,+\infty[$ بالعلاقة $f(x)=ln\dfrac{x+2}{x}$

1) احسب نهاية f عند كل طرف من أطراف مجموعة تعريفه D_f .

2) أوجد $f'(x)$ وادرس إشارته ثم نظم جدولاً بتغيرات التابع f .

3) ارسم الخط C في معلمٍ متجانس .

4) لتكن $(u_n)_{n\geq1}$ متتالية معرفة على N^* وفق $u_n=f(n)$. نضع $S_n=u_1+u_2+......+u_n$.

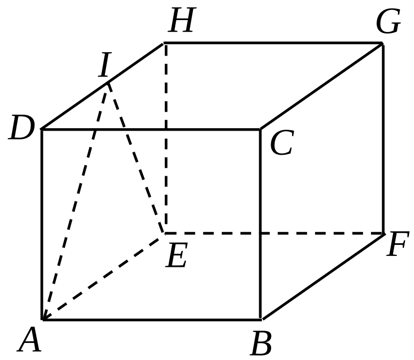
أثبت أن $S_n=ln\dfrac{(n+2)(n+1)}{2}$.

انتهت الأسئلة

حلــول النمــوذج الثــانـي ①

أولاً – أجب عن الأسئلة الأربعة الآتية : (40° لكل سؤال)

السؤال الأول : نجد جانباً مكعباً طول ضلعه 1 . مزوداً بمعلم متجانس $(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AD})$



حيث I هي منتصف $[DH]$:

1) أعط إحداثيات النقاط I و E و A .

2) جد إحداثيات O مركز ثقل المثلث AEI .

3) أين تقع النقطة M التي تحقق $3\overrightarrow{FM}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{EO}$ ؟

4) احسب $\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IE}$

1) $I\left(0,\frac{1}{2},1\right)$ و $E\,(0,1,0)$ و $A\,(0,0,0)$

2) $$O\left(\frac{0}{3},\frac{\frac{1}{2}+1}{3},\frac{1}{3}\right)=\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$$

3) $3\overrightarrow{FM}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{EO}=\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{EO}=\overrightarrow{FO}$ ومنه : $\overrightarrow{FM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{FO}$

(أي : $3\overrightarrow{FM}=\overrightarrow{FM}+\overrightarrow{MO}\Rightarrow 2\overrightarrow{FM}+\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{0}$)

إذن M مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(F,2)$ و $(O,1)$ فهي تقع على $[FO]$

(تقسم القطعة المستقيمة $[FO]$ بنسبة $2:1$ من جهة F)

4) لدينا : $\overrightarrow{IA}\left(0,-\frac{1}{2},-1\right)$ و $\overrightarrow{IE}\left(0,\frac{1}{2},-1\right)$

وبالتالي : $\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IE}=(0)(0)+\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)+(-1)(-1)$

ومنه : $\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IE}=\frac{3}{4}$

السؤال الثاني : ليكن f التابع المعرف على $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ وفق : $f(x)=\dfrac{x^2-5x+1}{x+1}$

1) جد الأعداد a و b و c التي تحقق $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x+1}$ أياً يكن x من D .

2) احسب $I=\int_0^2 f(x)\,dx$.

1) طريقة أولى : بالقسمة الإقليدية

$$\begin{array}{r|l} x^2-5x+1 & x+1 \\ \mp x^2 \mp x & x-6 \\ \hline -6x+1 & \\ \pm 6x \pm 6 & \\ \hline 7 & \end{array}$$

إذن : $f(x)=x-6+\dfrac{7}{x+1}$

طريقة ثانية : تحليل البسط إلى مجاميع فئات

$$f(x)=\frac{x(x+1)-6(x+1)+7}{x+1}=x-6+\frac{7}{x+1}$$

طريقة ثالثة : فرض المقام , بفرض $x+1=u$ ومنه $x=u-1$ نجد :

$$\frac{x^2-5x+1}{x+1}=\frac{u^2-2u+1-5u+5+1}{u}=u-7+\frac{7}{u}$$

إذن : $f(x)=x-6+\dfrac{7}{x+1}$

طريقة رابعة : نوحد مقامات التابع المطلوب ونطابق مع التابع المعطى (نتركها للقارئ)

إذن : $a=1\ ,\ b=-6\ ,\ c=7$

2) التكامل : $I=\int_0^2\left(x-6+7\cdot\dfrac{1}{x+1}\right)dx$

حيث $x+1>0$ على المجال $[0,2]$

$$I=\left[\frac{1}{2}x^2-6x+7\ln(x+1)\right]_0^2$$

$$I=[-10+7\ln 3]-[0]=-10+7\ln 3$$

<u>السؤال الثالث</u> : ليكن z عدداً عقدياً ما , وليكن w عدداً عقدياً طويلته تساوي الواحد وهو مختلف عن الواحد . أثبت أن $\dfrac{w\,\overline{z}-z}{i\,w-i}$ تخيلي بحت .

نضع : $u=\dfrac{w\,\overline{z}-z}{i\,w-i}$

يكون u تخيلي بحت إذا كان $\overline{u}=-u$ حيث $|w|=1$ ومنه $\overline{w}\cdot w=1$

$$\overline{u}=\overline{\left(\frac{w\,\overline{z}-z}{i\,w-i}\right)}=\frac{\overline{w\,\overline{z}-z}}{\overline{i\,w-i}}$$

$$=\frac{\overline{w}\,z-\overline{z}}{-i\,\overline{w}+i}=\frac{\left(w\,\overline{w}\right)z-w\,\overline{z}}{-i\left(w\,\overline{w}\right)+i\,w}$$

$$\overline{u}=\frac{z-w\,\overline{z}}{-i+i\,w}=-\frac{w\,\overline{z}-z}{i\,w-i}$$

إذن : $\overline{u}=-u$ ومنه u تخيلي بحت .

<u>السؤال الرابع</u> : احسب مشتق التابع f المعرف على R وفق : $f(x)=e^{1-\sin x}$

$$f'(x)=-\cos x\cdot e^{1-\sin x}$$

حلــول النمــوذج الثـــاني 4

ثانياً – حل التمارين الأربعة الآتية : (60° لكل تمرين)

التمرين الأول : ليكن f التابع المعرف على R وفق : $f(x)=\dfrac{x^2+|x|}{x^2+1}$

1) ما نهاية التابع f عند $-\infty$ ؟

2) ادرس قابلية اشتقاق f عند الصفر من اليمين , ثم اكتب معادلة لنصف المماس من اليمين لخطه البياني C_f في النقطة $A(0,0)$.

1) في حالة $x<0$ يكون : $f(x)=\dfrac{x^2-x}{x^2+1}$ وبالتالي : $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} f(x)=1$

2) في حالة $x\geq 0$ يكون : $f(x)=\dfrac{x^2+x}{x^2+1}$

$$x\neq 0:\ g(x)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{1}{x}\left(\frac{x^2+x}{x^2+1}\right)=\frac{x+1}{x^2+1}$$

وبالتالي : $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} g(x)=1\in R$

فالتابع f يقبل الاشتقاق عند الصفر من اليمين . حيث $f'(0^+)=1$

معادلة نصف المماس من اليمين : $y=f(0)+f'(0^+)(x-0)\Rightarrow y=x$

التمرين الثاني : لتكن $(x_n)_{n\geq 0}$ المتتالية المعرفة وفق العلاقة $x_{n+1}=\dfrac{6}{5}x_n+\dfrac{4}{5}\ ,x_0=5$

1) احسب x_1,x_2,x_3 ثم ادرس اطراد المتتالية .

2) نعرف $(y_n)_{n\geq 0}$ بالعلاقة $y_n=x_n+4$. أثبت أن $(y_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية .

3) اكتب y_n بدلالة n . ثم احسب $y_2+y_3+......+y_{10}$ بدلالة قوة للعدد $\dfrac{6}{5}$.

1) $x_1=6+\dfrac{4}{5}=\dfrac{34}{5}\ ,\ x_2=\dfrac{6}{5}\times\dfrac{34}{5}+\dfrac{4}{5}=\dfrac{224}{25}\ ,\ x_3=\dfrac{6}{5}\times\dfrac{224}{25}+\dfrac{4}{5}=\dfrac{1444}{125}$

$$x_0=\frac{625}{125}\ ,\ x_1=\frac{850}{125}\ ,\ x_2=\frac{1120}{125}\ ,\ x_3=\frac{1444}{125}$$

الأستاذ : محمــد خالــد غــزول

الأستاذ : عبــد الحميــد السيــد

نلاحظ أن $x_3 > x_2 > x_1 > x_0$

نضع الخاصة $E(n)$ هي « $x_{n+1} - x_n > 0$ »

(1) الخاصة $E(0)$ صحيحة لأن : $x_1 - x_0 = \frac{9}{5} > 0$

(2) نفترض أن $E(n)$ صحيحة أي : $x_{n+1} - x_n > 0$

لنبرهن صحة $E(n+1)$ أي لنبرهن أن : $x_{n+2} - x_{n+1} > 0$

$$x_{n+2} - x_{n+1} = \left(\frac{6}{5}x_{n+1} + \frac{4}{5}\right) - \left(\frac{6}{5}x_n + \frac{4}{5}\right)$$

$$= \frac{6}{5}\left(x_{n+1} - x_n\right)$$

وبما أن : $x_{n+1} - x_n > 0$

فإن : $x_{n+2} - x_{n+1} > 0$

إذن $E(n+1)$ صحيحة

مما سبق نستنتج أن $E(n)$ صحيحة أياً كان العدد الطبيعي n .

أي المتتالية $(x_n)_{n \geq 0}$ متزايدة تماماً بدءاً من الحد ذي الدليل $n_0 = 0$.

2) لدينا : $y_n = x_n + 4$

$$y_{n+1} = x_{n+1} + 4 = \frac{6}{5}x_n + \frac{4}{5} + 4$$

$$y_{n+1} = \frac{6}{5}x_n + \frac{24}{5} = \frac{6}{5}\left(x_n + 4\right)$$

ومنه : $y_{n+1} = \frac{6}{5}y_n$

فالمتتالية $(y_n)_{n \geq 0}$ هندسية أساسها $q = \frac{6}{5}$.

3) لدينا : $y_0 = x_0 + 4 = 9$

وبالتالي : $y_n = y_0 (q)^n = 9\left(\frac{6}{5}\right)^n$

عدد حدود المجموع $S = y_2 + y_3 + \ldots\ldots + y_{10}$ يساوي : $n = 10 - 2 + 1 = 9$

والمجموع : $S = a \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$

حيث : $a = y_2 = 9\left(\frac{6}{5}\right)^2 = \frac{324}{25}$

وبالتالي : $S = \frac{324}{25} \cdot \frac{1-\left(\frac{6}{5}\right)^9}{1-\frac{6}{5}}$, إذن : $S = \frac{324}{5}\left[\left(\frac{6}{5}\right)^9 - 1\right]$

<u>التمرين الثالث</u> : في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, لدينا نقطتين $A(2,-1,0)$ و $B(-1,3,5)$

والمستوي P الذي يقبل معادلة $2x - 3y + z - 5 = 0$

1) أثبت أن المستقيم (AB) يقطع المستوي P في نقطة C يطلب تعيين إحداثياتها .

2) اكتب معادلة للمستوي Q العمودي على P ويمر بالنقطتين A و B .

1) لدينا : $\overrightarrow{AB}(-3,4,5)$ شعاع توجيه للمستقيم (AB) .

ولدينا : $\overrightarrow{n_P}(2,-3,1)$ شعاع ناظم على المستوي P .

وبالتالي : $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = -6 - 12 + 5 = -13 \neq 0$

إذن المستقيم (AB) لا يوازي المستوي P فهو قاطع له بنقطة ولتكن C .

بفرض (a,b,c) إحداثيات النقطة C

وبالتالي النقاط A و B و C على استقامة واحدة

أي يوجد $k \in R$ بحيث : $\overrightarrow{AC} = k\,\overrightarrow{AB}$

وبالتالي : $(a-2, b+1, c) = k\,(-3,4,5)$

ومنه : $\begin{cases} a=-3k+2 \\ b=4k-1 \\ c=5k \end{cases}$, وبما أن C نقطة من المستوي P فهي تحقق معادلته .

أي : $2(-3k+2)-3(4k-1)+(5k)-5=0$

ومنه : $-6k+4-12k+3+5k-5=0 \Rightarrow k=\frac{2}{13}$

وبالتالي : $a=-\frac{6}{13}+2=\frac{20}{13}$ و $b=\frac{8}{13}-1=-\frac{5}{13}$ و $c=\frac{10}{13}$

إذن : $C\left(\frac{20}{13},-\frac{5}{13},\frac{10}{13}\right)$

2) بفرض $\overrightarrow{n_Q}(a,b,c)$ شعاع ناظم على المستوي Q

بما أن Q عمودي على P فإن : $\overrightarrow{n_P}\cdot\overrightarrow{n_Q}=0$

ومنه : $2a-3b+c=0 \quad ...(1)$

لدينا المستقيم (AB) محتوى في Q فالشعاع $\overrightarrow{AB}(-3,4,5)$ عمودي على $\overrightarrow{n_Q}$

أي : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{n_Q}=0$

ومنه : $-3a+4b+5c=0 \quad ...(2)$

بتعويض $c=1$ في المعادلتين نجد $\begin{cases} 2a-3b+1=0 \\ -3a+4b+5=0 \end{cases}$

بالجمع نجد $-a+b+6=0$ ومنه : $b=a-6$

نعوض في (1) فنجد : $2a-3a+18+1=0$

ومنه $a=19$ وبالتالي $b=13$

إذن : $\overrightarrow{n_Q}(19,13,1)$

وبما أن Q يمر بالنقطتين A و B يمكن أخذ إحداهما ولتكن A فنكتب :

$$19(x-2)+13(y+1)+1(z-0)=0$$

إذن : $Q: 19x+13y+z-25=0$

التمرين الرابع : يحتوي صندوق على أربع كرات زرقاء , وثلاث كرات خضراء , وواحدة بيضاء

نسحب عشوائياً معاً ثلاث كرات من الصندوق

ليكن X المتحول العشوائي الذي يمثل عدد الألوان المختلفة بين الكرات المسحوبة

1) ما هي مجموعة القيم التي يأخذها X ؟

2) احسب كلاً من $P(X=1)$ و $P(X=3)$ ثم استنتج قيمة $P(X=2)$.

3) احسب توقع X وانحرافه المعياري .

1) $X(\Omega)=\{1,2,3\}$

2) (توضيح : $X=1$ عند ظهور كرات من نفس اللون أي 3 زرقاء أو 3 خضراء)

$$P(X=1)=\frac{\binom{4}{3}+\binom{3}{3}}{\binom{8}{3}}=\frac{4+1}{56}=\frac{5}{56}$$

(توضيح : $X=3$ عند ظهور كرة من كل لون أي 1 زرقاء و 1 خضراء و 1 بيضاء)

$$P(X=3)=\frac{\binom{4}{1}\times\binom{3}{1}\times\binom{1}{1}}{\binom{8}{3}}=\frac{4\times3\times1}{56}=\frac{12}{56}$$

$$P(X=2)=1-[P(X=1)+P(X=3)]$$

$$P(X=2)=1-\frac{17}{56}=\frac{39}{56}$$

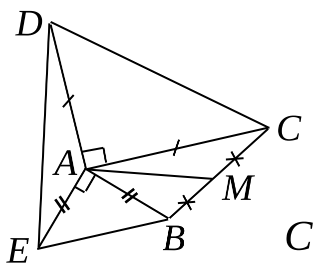
3) التوقع : $E(X)=\frac{1}{56}(1\times5+2\times39+3\times12)\Rightarrow E(X)=\frac{119}{56}=\frac{17}{8}$

$$E\left(X^2\right)=\frac{1}{56}(1\times5+4\times39+9\times12)\Rightarrow E\left(X^2\right)=\frac{269}{56}$$

$$V(X)=E\left(X^2\right)-(E(X))^2=\frac{269}{56}-\frac{289}{64}=\frac{129}{448}$$

الانحراف المعياري : $\sigma(X)=\frac{129}{448}=\frac{129}{64\times7}=\frac{1}{8}\sqrt{\frac{129}{7}}$

المسألة الأولى : نتأمل في المستوي مثلثاً ABC مباشر التوجيه كيفياً .



لتكن M منتصف $[BC]$, وليكن AEB و ACD مثلثين قائمين في A ومتساويي الساقين مباشرين . نختار معلماً مباشراً مبدأه النقطة A .

ونرمز بالرمزين b و c إلى العددين العقديين اللذين يمثلان النقطتين B و C

1) احسب بدلالة b و c الأعداد العقدية e و d و m الممثلة للنقاط E و D و M بالترتيب .

2) احسب $\dfrac{d-e}{m-a}$ ثم استنتج أن (AM) هو ارتفاع في المثلث AED وأن $ED = 2AM$

3) نفترض أن A هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(D,2)$ و $(E,3)$ و $(C,1)$ و $(B,1)$. احسب $\dfrac{c}{b}$, ثم احسب قياس الزاوية BAC .

1) E صورة B وفق الدوران ربع دورة بالاتجاه السالب حول A وبالتالي : $e = e^{-i\frac{\pi}{2}} b = -i\,b$

D صورة C وفق الدوران ربع دورة بالاتجاه الموجب حول A وبالتالي : $d = e^{i\frac{\pi}{2}} c = i\,c$

M منتصف $[BC]$ أي : $m = \dfrac{b+c}{2}$

2) $d - e = i(b+c) \Rightarrow d - e = 2i\,m \Rightarrow \dfrac{d-e}{m-a} = 2i$

وبالتالي : $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{ED}) = \arg\dfrac{d-e}{m-a} = \arg(2i) = \dfrac{\pi}{2}$

إذن : (AM) هو ارتفاع في المثلث AED .

أيضاً : $|d-e| = 2|m-a|$, إذن : $ED = 2AM$

3) $z_A = \dfrac{b+c+3e+2d}{1+1+3+2} = 0 \Rightarrow b + c - 3i\,b + 2i\,c = 0 \Rightarrow c(1+2i) = b(-1+3i)$

$$\frac{c}{b} = \frac{-1+3i}{1+2i} = \frac{(-1+3i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{-1+2i+3i+6}{1+4}$$

$$\frac{c}{b} = 1 + i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\,\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \arg\frac{c-a}{b-a} = \arg\frac{c}{b} = \arg\left(\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}\right) \Rightarrow \widehat{BAC} = \frac{\pi}{4}$$

المسألة الثانية : ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $D_f =]-\infty,-2[\cup]0,+\infty[$

بالعلاقة $f(x) = ln\frac{x+2}{x}$

1) احسب نهاية f عند كل طرف من أطراف مجموعة تعريفه D_f .

2) أوجد $f'(x)$ وادرس إشارته ثم نظم جدولاً بتغيرات التابع f .

3) ارسم الخط C في معلمٍ متجانس .

4) لتكن $(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية معرفة على N^* وفق $u_n = f(n)$

نضع $S_n = u_1 + u_2 + ...+u_n$. أثبت أن $S_n = ln\frac{(n+2)(n+1)}{2}$.

1) النهايات : $\lim_{x\to-\infty} f(x) = ln1 = 0$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x) = ln1 = 0$

$\lim_{x\to(-2)^-} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$

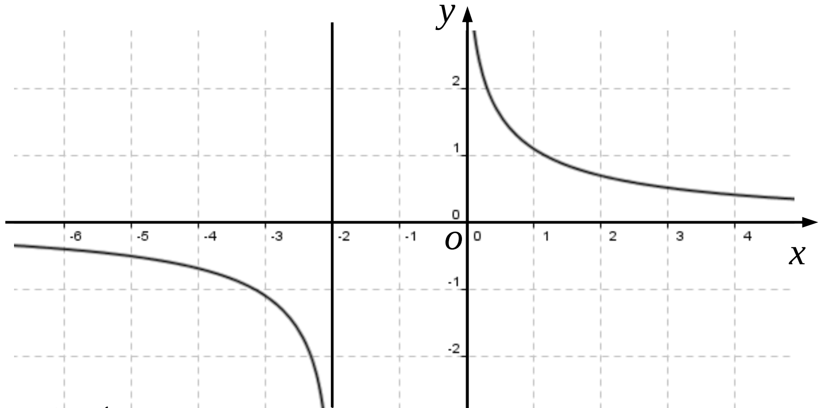
2) f اشتقاقي على كل من المجالين $]-\infty,-2[$ و $]0,+\infty[$:

$$f'(x) = \left(\frac{x+2}{x}\right)' \cdot \left(\frac{x}{x+2}\right) = \frac{x-x-2}{x^2} \cdot \frac{x}{x+2} = \frac{-2}{x^2+2x}$$

أياً يكن x من D_f فإن $x^2+2x>0$ وبالتالي $f'(x)<0$

x	$-\infty$ $\quad$ -2		0 $\quad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$		$-$
$f(x)$	$0 \searrow -\infty$		$+\infty \searrow 0$

3) الرسم :



4) لدينا : $u_n = ln\frac{n+2}{n}$ و $S_1 = u_1 = ln3$

الخاصة $E(n)$ هي « $S_n = ln\frac{(n+2)(n+1)}{2}$ »

(1) الخاصة $E(1)$ صحيحة لأن : $S_1 = ln\frac{3\times 2}{2} = ln3$

(2) نفترض صحة الخاصة $E(n)$ أي أن : $S_n = ln\frac{(n+2)(n+1)}{2}$

لنبرهن صحة $E(n+1)$ أي أن : $S_{n+1} = ln\frac{(n+3)(n+2)}{2}$

$$S_{n+1} = S_n + u_{n+1}$$
$$= ln\frac{(n+2)(n+1)}{2} + ln\frac{n+3}{n+1}$$
$$= ln\left[\frac{(n+2)(n+1)}{2}\times\frac{n+3}{n+1}\right]$$
$$S_{n+1} = ln\frac{(n+3)(n+2)}{2}$$

فالخاصة $E(n+1)$ صحيحة

مما سبق نستنتج أن $E(n)$ صحيحة أياً تكن $n \geq 1$

أي أن : $S_n = ln\frac{(n+2)(n+1)}{2}$

(انتهت حلول النموذج الثاني ونسألكم الدعاء)

الأستاذ : محمــد خالــد غــزول **الأستاذ : عبــد الحميــد السيــد**

الجمهورية العربية السورية النموذج الثالث

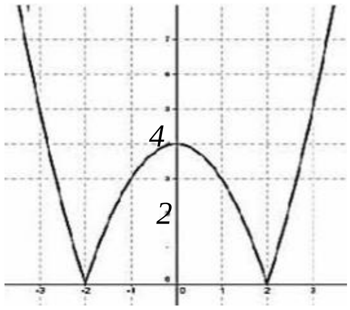
وزارة التربية الدرجة العظمى : ستمئة

المركز الوطني لتطوير المناهج التربوية المدة : ثلاث ساعات

نموذج امتحان لمادة الرياضيات الصف الثالث الثانوي العلمي (المنهاج الجديد 2017)

أولاً – <u>أجب عن الأسئلة الأربعة الآتية</u> : (40° لكل سؤال)

<u>السؤال الأول</u> : تجد جانباً الخط البياني للتابع f المعرف على R . والمطلوب :



1) كم حلاً للمعادلة $f(x)=2$.

2) احسب قيمة المشتق للتابع عند الصفر .

3) عين صورة المجال $I=[-2,2]$ وفق f .

4) كم قيمة صغرى أو كبرى محلية للتابع f .

<u>السؤال الثاني</u> : حل في R المعادلة الآتية : $-ln(x+1)+ln\,x=ln(x-1)$

<u>السؤال الثالث</u> : اكتب معادلة المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$

حيث $A(2,-1,3)$ و $B(4,3,-1)$

<u>السؤال الرابع</u> : ما هي أمثال الحد x^2y في منشور $\left(\frac{y^2}{x}+\frac{x}{y}\right)^8$

ثانياً – <u>حل التمارين الأربعة الآتية</u> : (60° لكل تمرين)

<u>التمرين الأول</u> : إذا كان $f(x)=\frac{cos\,x-1}{x^2}+\frac{1}{2}$ أياً يكن x من R^*

أوجد نهاية التابع f عند الصفر

<u>التمرين الثاني</u> : لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالعلاقة التدريجية : $u_0=\frac{1}{2}$, $u_{n+1}=\frac{u_n}{2-u_n}$

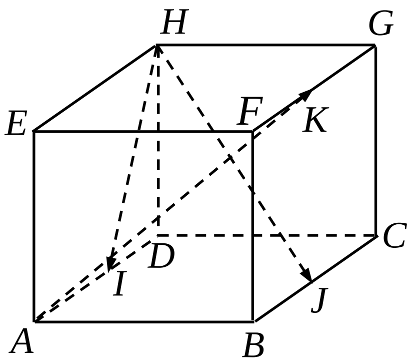
1) أثبت أن $0<u_n<1$ أياً كانت n من N .

2) نعرف $(v_n)_{n\geq 0}$ حيث $v_n=\frac{1}{u_n}-1$.أثبت أن $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية واستنتج v_n بدلالة n

3) اكتب u_n بدلالة n , واحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

تابع في الصفحة الثانية

التمرين الثالث : $ABCDEFGH$ مكعب . I و J و K هي بالترتيب



منتصفات $[AD]$ و $[BC]$ و $[FG]$

1 . باختيار معلم متجانس $(D\,;\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DH})$

احسب مركبات كل من الأشعة $\overrightarrow{AK}$ و $\overrightarrow{HI}$ و $\overrightarrow{HJ}$

2 . أوجد عددين حقيقيين a و b يحققان المساواة :

$$\overrightarrow{AK}=a\,\overrightarrow{HI}+b\,\overrightarrow{HJ}$$

ثم استنتج أن الأشعة $\overrightarrow{AK}$ و $\overrightarrow{HI}$ و $\overrightarrow{HJ}$ مرتبطة خطياً .

التمرين الرابع : عين العددين z_1 و z_2 حيث : $\begin{cases} 2z_1 - z_2 = -3 \\ 2\overline{z_1} + \overline{z_2} = -3 + 2\sqrt{3}\,i \end{cases}$

ثالثاً – حل المسألتين الآتيتين : ($90°$ للأولى و $110°$ للثانية)

المسألة الأولى : صندوق يحتوي على ثلاث كرات حمراء وأربع كرات سوداء .

نسحب من الصندوق ثلاث كرات في آن معاً وليكن الحدث A الحصول على كرة حمراء على الأقل والحدث B الحصول على كرتين سوداوين على الأقل .

1) احسب احتمالات الأحداث التالية : $A\,,\,B\,,\,A\backslash B$.

2) إذا كان X متحول عشوائي يدل على عدد الكرات الحمراء المسحوبة .

اكتب جدول قانونه الاحتمالي واحسب توقعه وتباينه .

المسألة الثانية : ليكن التابع f المعرف على R وفق : $f(x)=2e^{-x}+x-2$ خطه البياني C

1) أوجد معادلة المقارب المائل للخط C وادرس الوضع النسبي للخط C بالنسبة إلى هذا المقارب .

2) ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها . وبين أنه يبلغ قيمة حدية محلية عينها وبين نوعها .

3) استنتج أن للمعادلة $f(x)=0$ جذرين أحدهما يساوي الصفر والآخر نرمزه بالرمز α .

أثبت أن $1<\alpha<2$.

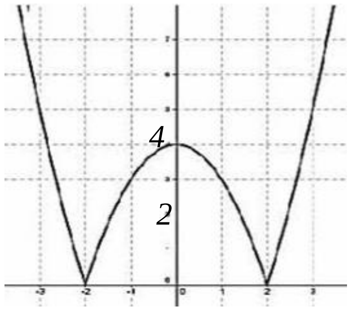
4) ارسم المقارب المائل ثم ارسم C , واحسب مساحة السطح المحصور بين C والمستقيمات التي معادلاتها $y=x-2$ و $x=\ln 2$ و $x=\ln 3$.

انتهت الأسئلة

حلــول النمــوذج الثـــالث ①

أولاً – أجب عن الأسئلة الأربعة الآتية : (40° لكل سؤال)

السؤال الأول : تجد جانباً الخط البياني للتابع f المعرف على R . والمطلوب :



1) كم حلاً للمعادلة $f(x)=2$.

2) احسب قيمة المشتق للتابع عند الصفر .

3) عين صورة المجال $I=[-2,2]$ وفق f .

4) كم قيمة صغرى أو كبرى محلية للتابع f .

1) أربعة حلول . (توضيح : المستقيم الذي معادلته $y=2$ يقطع الخط البياني بأربعة نقاط)

2) $f'(0)=0$. (توضيح : الخط البياني يقبل مماساً أفقياً عند $x=0$)

3) $f(I)=[0,4]$.

4) قيمتان صغريان محلياً وقيمة كبرى محلية .

السؤال الثاني : حل في R المعادلة الآتية : $-\ln(x+1)+\ln x=\ln(x-1)$

المعادلة معرفة عندما : $x>-1$ و $x>0$ و $x>1$

إذن المعادلة معرفة عندما : $x>1$

$$\ln x=\ln(x-1)+\ln(x+1)\Rightarrow \ln x=\ln\left(x^2-1\right)$$

$$x^2-x-1=0\Rightarrow\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}-1=0$$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{4}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}<1\\ x=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}>1\end{cases}$$

إذن $x=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}$ حل وحيد للمعادلة المفروضة .

<u>السؤال الثالث</u> : اكتب معادلة المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$

حيث $A(2,-1,3)$ و $B(4,3,-1)$

بفرض N منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$ أي : $N(3,1,1)$

ولدينا $\overrightarrow{AB}(2,4,-4)$ شعاعاً ناظماً على المستوي المحوري

فإن : $2(x-3)+4(y-1)-4(z-1)=0$

إذن معادلة المستوي المطلوبة : $x+2y-2z-3=0$

<u>طريقة ثانية</u> :

تنتمي $M(x,y,z)$ إلى المستوي المحوري

إذا وفقط إذا كان $AM=BM \Leftrightarrow AM^2=BM^2$

$$(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=(x-4)^2+(y-3)^2+(z+1)^2$$

ومنه : $-4x+2y-6z+14=-8x-6y+2z+26$

إذن معادلة المستوي المطلوبة : $x+2y-2z-3=0$

<u>السؤال الرابع</u> : ما هي أمثال الحد x^2y في منشور $\left(\frac{y^2}{x}+\frac{x}{y}\right)^8$

$$T_r=\binom{8}{r}\left(\frac{y^2}{x}\right)^{8-r}\left(\frac{x}{y}\right)^r$$

$$T_r=\binom{8}{r}\left(\frac{y^{16-2r}}{x^{8-r}}\right)\left(\frac{x^r}{y^r}\right)$$

$$T_r=\binom{8}{r}x^{2r-8}\cdot y^{16-3r}$$

$r=5$ ومنه $(2r-8=2$ و $16-3r=1)$

أمثال الحد x^2y تساوي : $\binom{8}{5}=\binom{8}{3}=\frac{8\times7\times6}{3\times2\times1}=56$

حلـــول النمـــوذج الثـــالث (3)

ثانياً – حل التمارين الأربعة الآتية : (60° لكل تمرين)

التمرين الأول : إذا كان $f(x)=\frac{\cos x-1}{x^2}+\frac{1}{2}$ أياً يكن x من R^*

أوجد نهاية التابع f عند الصفر

$$f(x)=\frac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{4\frac{x^2}{4}}+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2+\frac{1}{2}$$

بما أن $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}=\lim\limits_{\theta\longrightarrow 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$

فإن : $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} f(x)=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=0$

التمرين الثاني : لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالعلاقة التدريجية : $u_0=\frac{1}{2}\ ,\ u_{n+1}=\frac{u_n}{2-u_n}$

1) أثبت أن $0<u_n<1$ أياً كانت n من N .

2) نعرف $(v_n)_{n\geq 0}$ حيث $v_n=\frac{1}{u_n}-1$.أثبت أن $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية واستنتج v_n بدلالة n

3) اكتب u_n بدلالة n , واحسب $\lim\limits_{n\longrightarrow +\infty} u_n$

1) نفترض $E(n)$ هي الخاصة : « $0<u_n<1$ »

(1) الخاصة $E(0)$ صحيحة لأن : $0<u_0=\frac{1}{2}<1$.

(2) نفترض أن $E(n)$ صحيحة أي : $0<u_n<1$

ولنبرهن أن $E(n+1)$ صحيحة أي لنبرهن أن $0<u_{n+1}<1$

لدينا : $u_{n+1}=-\frac{2-u_n-2}{2-u_n}=-1+\frac{2}{2-u_n}$

$$0<u_n<1\Rightarrow 0>-u_n>-1\Rightarrow 2>2-u_n>1$$

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{2-u_n} < 1 \Rightarrow 1 < \frac{2}{2-u_n} < 2$$

$$0 < -1 + \frac{2}{2-u_n} < 1 \Rightarrow 0 < u_{n+1} < 1$$

فالخاصة $E(n+1)$ صحيحة

مما سبق نستنتج أن $0 < u_n < 1$ أياً كان العدد الطبيعي n

<u>طريقة ثانية</u> : لإثبات صحة $E(n+1)$

نأخذ التابع f المعرف وفق $f(x) = \frac{x}{2-x}$

وهو اشتقاقي على كل من المجالين $]-\infty,2[$ و $]2,+\infty[$

$$f'(x) = \frac{2-x+x}{(2-x)^2} = \frac{2}{(2-x)^2} > 0$$

فالتابع f متزايد تماماً على كل من المجالين $]-\infty,2[$ و $]2,+\infty[$

بالاستفادة من تزايد التابع f على المجال $]-\infty,2[$

نستنتج أن : $f(0) < f(u_n) < f(1)$

وبما أن : $f(0) = 0$ و $f(1) = 1$

فإن $0 < u_{n+1} < 1$ وبالتالي $E(n+1)$ صحيحة

2) لدينا : $v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}} - 1 = \frac{2-u_n}{u_n} - 1 = \frac{2}{u_n} - 1 - 1 = 2\left(\frac{1}{u_n} - 1\right) = 2v_n$

إذن : $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية أساسها $q = 2$ و $v_0 = \frac{1}{u_0} - 1 = 1$

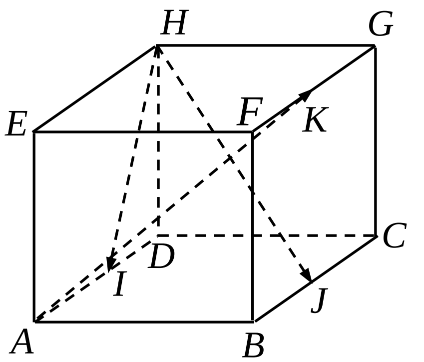
وبالتالي : $v_n = v_0 (q)^n = 2^n$

3) لدينا : $v_n + 1 = \frac{1}{u_n}$ ومنه : $u_n = \frac{1}{v_n + 1}$

إذن : $u_n = \frac{1}{2^n + 1}$

بما أن $q = 2 > 1$ فإن : $\lim\limits_{n \to +\infty} 2^n = +\infty$ ومنه $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

<u>التمرين الثالث</u> : $ABCDEFGH$ مكعب . I و J و K هي بالترتيب



منتصفات $[AD]$ و $[BC]$ و $[FG]$

1 . باختيار معلم متجانس $(D;\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DH})$

احسب مركبات كل من الأشعة $\overrightarrow{AK}$ و $\overrightarrow{HI}$ و $\overrightarrow{HJ}$

2 . أوجد عددين حقيقيين a و b يحققان المساواة :

$$\overrightarrow{AK}=a\overrightarrow{HI}+b\overrightarrow{HJ}$$

ثم استنتج أن الأشعة $\overrightarrow{AK}$ و $\overrightarrow{HI}$ و $\overrightarrow{HJ}$ مرتبطة خطياً .

1 . $H(0,0,1)$ و $I\left(\frac{1}{2},0,0\right)$ و $J\left(\frac{1}{2},1,0\right)$ و $K\left(\frac{1}{2},1,1\right)$ و $A(1,0,0)$

$\overrightarrow{AK}\left(-\frac{1}{2},1,1\right)$ و $\overrightarrow{HI}\left(\frac{1}{2},0,-1\right)$ و $\overrightarrow{HJ}\left(\frac{1}{2},1,-1\right)$

2 . $\left(-\frac{1}{2},1,1\right)=a\left(\frac{1}{2},0,-1\right)+b\left(\frac{1}{2},1,-1\right)$

$a+b=-1 \quad \dots(1)$

$b=1 \quad \dots(2)$ ومنه : $(a,b)=(-2,1)$

$a+b=-1 \quad \dots(3)$

بما أن : $\overrightarrow{AK}=-2\overrightarrow{HI}+\overrightarrow{HJ}$

فإن الأشعة $\overrightarrow{AK}$ و $\overrightarrow{HI}$ و $\overrightarrow{HJ}$ مرتبطة خطياً

<u>التمرين الرابع</u> : عين العددين z_1 و z_2 حيث : $\begin{cases} 2z_1-z_2=-3 \\ 2\overline{z_1}+\overline{z_2}=-3+2\sqrt{3}\,i \end{cases}$

بأخذ مرافق طرفي الثانية نجد : $2z_1+z_2=-3-2\sqrt{3}\,i$

بطرح الأولى منها نجد : $2z_2=-2\sqrt{3}\,i$ ومنه $z_2=-\sqrt{3}\,i$

نعوض في الأولى : $2z_1+\sqrt{3}\,i=-3$ ومنه $z_1=-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

الأستاذ : محمــد خالــد غــزول

الأستاذ : عبــد الحميــد السيــد

ثالثاً – حل المسألتين الآتيتين : (°90 للأولى و °110 للثانية)

المسألة الأولى : صندوق يحتوي على ثلاث كرات حمراء وأربع كرات سوداء .

نسحب من الصندوق ثلاث كرات في آن معاً وليكن الحدث A الحصول على كرة حمراء على الأقل والحدث B الحصول على كرتين سوداوين على الأقل .

1) احسب احتمالات الأحداث التالية : $A \setminus B \;,\; B \;,\; A$.

2) إذا كان X متحول عشوائي يدل على عدد الكرات الحمراء المسحوبة .

اكتب جدول قانونه الاحتمالي واحسب توقعه وتباينه .

1) لدينا : $P(A)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)$

$$P(A_1)=\frac{\binom{3}{1}\cdot\binom{4}{2}}{\binom{7}{3}}=\frac{18}{35}\;,P(A_2)=\frac{\binom{3}{2}\cdot\binom{4}{1}}{\binom{7}{3}}=\frac{12}{35}\;,P(A_3)=\frac{\binom{3}{3}}{\binom{7}{3}}=\frac{1}{35}$$

$$P(A)=\frac{18}{35}+\frac{12}{35}+\frac{1}{35}\Rightarrow P(A)=\frac{31}{35}$$

الحصول على ثلاث كرات سوداء هو المضاد لـ A : $P(A')=1-P(A)=1-\frac{31}{35}=\frac{4}{35}$

$$P(B)=P(A_1)+P(A')=\frac{18}{35}+\frac{4}{35}\Rightarrow P(B)=\frac{22}{35}$$

$$P(A\setminus B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A_1)}{P(B)}=\frac{18}{35}\times\frac{35}{22}\Rightarrow P(A\setminus B)=\frac{9}{11}$$

2) لدينا $X(\Omega)=\{0,1,2,3\}$ وبالتالي :

x	0	1	2	3
$P(X=x)$	$\frac{4}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{35}$

$$E(X)=\frac{1}{35}(0\times4+1\times18+2\times12+3\times1)\Rightarrow E(X)=\frac{45}{35}=\frac{9}{7}$$

$$E\left(X^2\right)=\frac{1}{35}(0\times4+1\times18+4\times12+9\times1)\Rightarrow E\left(X^2\right)=\frac{75}{35}=\frac{15}{7}$$

$$V(X)=E\left(X^2\right)-(E(X))^2=\frac{15}{7}-\frac{81}{49}=\frac{105-81}{49}\Rightarrow V(X)=\frac{24}{49}$$

<u>المسألة الثانية</u> : ليكن التابع f المعرف على R وفق : $f\left(x\right)=2e^{-x}+x-2$ خطه البياني C

1) أوجد معادلة المقارب المائل للخط C وادرس الوضع النسبي للخط C بالنسبة إلى هذا المقارب

2) ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها . وبين أنه يبلغ قيمة حدية محلية عينها وبين نوعها .

3) استنتج أن للمعادلة $f\left(x\right)=0$ جذرين أحدهما يساوي الصفر والآخر نرمزه بالرمز α .

أثبت أن $1<\alpha<2$.

4) ارسم المقارب المائل ثم ارسم C , واحسب مساحة السطح المحصور بين C والمستقيمات التي معادلاتها $y=x-2$ و $x=\ln 2$ و $x=\ln 3$.

1) نضع : $g\left(x\right)=f\left(x\right)-\left(x-2\right)=2e^{-x}$ وبما أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} g\left(x\right)=0$

فإن المستقيم d الذي معادلته $y=x-2$ مستقيم مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$.

بما أن $g\left(x\right)=2e^{-x}>0$ أياً كانت x من R فإن الخط C يقع دوماً فوق مقاربه d .

2) f مستمر واشتقاقي على R : $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)=+\infty$

في جوار $-\infty$ لدينا حالة عدم تعيين $+\infty-\infty$ لذا نكتب : $f\left(x\right)=e^{-x}\left(2+x\cdot e^{x}\right)-2$

وبما أن $\lim\limits_{x\to-\infty} x\cdot e^{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x}=+\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(x\right)=+\infty$

$$f'\left(x\right)=-2e^{-x}+1=e^{-x}\left(e^{x}-2\right)$$

إشارة المشتق تماثل إشارة $e^{x}-2$ الذي ينعدم عند $x=\ln 2$ ومنه $f\left(\ln 2\right)=-1+\ln 2$

x	$-\infty$	$\ln 2$	$+\infty$
$f'\left(x\right)$	$-$	0	$+$
$f\left(x\right)$	$+\infty$ ↘	$-1+\ln 2$	↗ $+\infty$

من الجدول نستنتج أن للتابع قيمة صغرى محلياً تساوي $-1+\ln 2$ يبلغها التابع عند $x=\ln 2$

3) $\left\{\begin{array}{l} f \text{ مستمر ومتناقص تماماً على } \left]-\infty,\ln 2\right[\\ \text{و } 0\in f\left(\left]-\infty,\ln 2\right[\right)=\left]-1+\ln 2,+\infty\right[\end{array}\right.$ عندئذٍ $\left\{\begin{array}{l} \text{للمعادلة } f\left(x\right)=0 \text{ حل وحيد} \\ \text{في المجال } \left]-\infty,\ln 2\right[\end{array}\right.$

f مستمر ومتزايد تماماً على $]ln\,2,+\infty[$ و $0\in f\left(]ln\,2,+\infty[\right)=]-1+ln\,2,+\infty[$ عندئذٍ للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد α في المجال $]ln\,2,+\infty[$

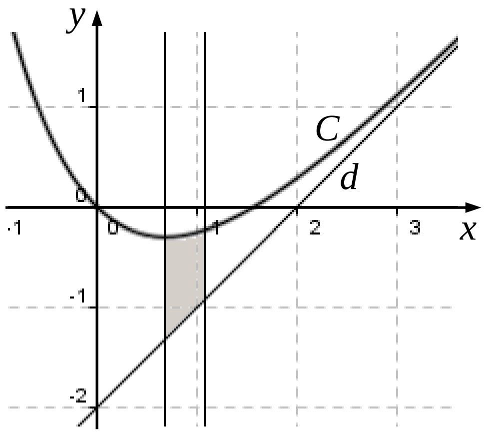
إذن للمعادلة $f(x)=0$ جذرين أحدهما يساوي الصفر لأن $f(0)=2-0-2=0$

والآخر α من المجال $]ln\,2,+\infty[$

وبما أن $0>f(1)=\frac{2}{e}-1<0$ و $f(2)=\frac{2}{e^2}>0$ ومنه $f(1)\times f(2)<0$

فإن : $1<\alpha<2$

4) الرسم والمساحة :



$$A=\int_{ln\,2}^{ln\,3}\left[f(x)-(x-2)\right]dx=\int_{ln\,2}^{ln\,3}\left(2e^{-x}\right)dx$$

$$A=\left[-2e^{-x}\right]_{ln\,2}^{ln\,3}=\left(-\frac{2}{3}\right)-(-1)\Rightarrow A=\frac{1}{3}$$

(انتهت حلول النموذج الثالث ونسألكم الدعاء)

الأستاذ : محمــد خالــد غــزول

الأستاذ : عبــد الحميــد السيــد

الجمهورية العربية السورية النموذج الرابع

وزارة التربية الدرجة العظمى : ستمئة

المركز الوطني لتطوير المناهج التربوية المـدة : ثلاث ساعات

نموذج امتحان لمادة الرياضيات الصف الثالث الثانوي العلمي (المنهاج الجديد 2017)

أولاً – أجب عن الأسئلة الأربعة الآتية : (40° لكل سؤال)

السؤال الأول : تجد جانباً جدول تغيرات التابع f والمطلوب :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	0	$-$	
$f(x)$	|| $-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

1) ما عدد حلول المعادلة $f(x)=0$.

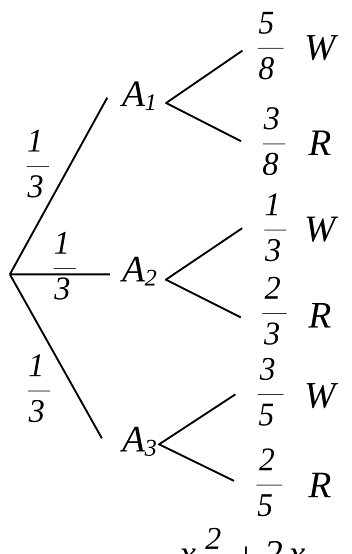
2) ما عدد القيم الحدية محلياً .

3) اكتب معادلة مماس منحن التابع عند نقطة فاصلتها $x=1$.

السؤال الثاني : حل في C المعادلة $z^2=1+2\sqrt{2}\,i$

السؤال الثالث : ليكن التابع f المعرف على $]1,+\infty[$ وفق : $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$

أوجد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم عين A ليكون $x>A$ $f(x)$ من المجال $]1.95\,,2.05[$.



السؤال الرابع : في المخطط الشجري المرسوم جانباً .

الرموز A_1 , A_2 , A_3 تدل على ثلاثة صناديق .

الرمز W يدل على الكرات البيضاء والرمز R يدل على الكرات الحمراء

يتم اختيار عشوائياً صندوق ثم يتم سحب عشوائياً كرة واحدة منه .

1) ما احتمال أن تكون الكرة المسحوبة حمراء .

2) إذا كانت الكرة المسحوبة حمراء فما احتمال أن تكون من الصندوق الأول A_1 .

ثانياً – حل التمارين الأربعة الآتية : (60° لكل تمرين)

التمرين الأول : ليكن C الخط البياني للتابع f التابع المعرف على $R\setminus\{-3\}$ وفق : $f(x)=\dfrac{x^2+2x-2}{x+3}$

1) اكتب $f(x)$ بالشكل : $f(x)=ax+b+\dfrac{1}{x+3}$ وعين قيمة كلاً من a و b

ثم أثبت أن المستقيم الذي معادلته $y=ax+b$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$.

2) احسب $\int_0^2 f(x)\,dx$.

تابع في الصفحة الثانية

التمرين الثاني : لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$, $u_{n+1} = e\sqrt{u_n}$ و $u_0 = e^3$

v_n متتالية معرفة بالشكل $v_n = ln(u_n) - 2$ والمطلوب :

1) أثبت أن v_n هندسية وعين q, v_0 . 2) اكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n .

3) أثبت أن : $\lim\limits_{n\longrightarrow +\infty} u_n = e^2$.

التمرين الثالث : $ABCDEFGH$ مكعب حيث K من CD تحقق : $\overrightarrow{DK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$

والنقطة $J \in BC$ بحيث $\overrightarrow{BJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$ والمطلوب :

1) جد احداثيات النقط H, E, J, K, G في المعلم $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AD})$

2) أثبت أن الشعاعين $\overrightarrow{EJ}$, $\overrightarrow{EG}$ غير مرتبطين خطياً .

3) أثبت أن الأشعة $\overrightarrow{EJ}$, $\overrightarrow{EG}$, $\overrightarrow{HK}$ مرتبطة خطياً .

4) أثبت أن المستقيم (HK) يوازي المستوي (EGJ) .

التمرين الرابع : أوجد الحد المستقل عن x في منشور ذي الحدين $\left(x + \frac{1}{x}\right)^8$

ثالثاً – حل المسألتين الآتيتين : (100° لكل مسألة)

المسألة الأولى : أولاً: ليكن التابع g المعرف على R وفق : $g(x) = e^x + 2 - x$

ادرس اطراد التابع g واستنتج مجموعة حلول المتراجحة $g(x) > 0$

ثانياً: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق $f(x) = x + \frac{x-1}{e^x}$

1) أثبت أن $f'(x) = \frac{1}{e^x} g(x)$

2) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً $0 < \alpha < 0.5$.

3) أثبت أن المستقيم $\Delta : y = x$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$ وادرس الوضع النسبي .

4) ارسم Δ وارسم C , واحسب مساحة السطح المحصور بين C و Δ والمستقيمين $x = 0$ و $x = 1$.

المسألة الثانية : في الفضاء المنسوب إلى معلم متجانس $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, لدينا النقاط :

$A(1,0,-1)$ و $B(2,2,3)$ و $C(3,1,-2)$ و $D(-4,2,1)$ والمطلوب :

1) أثبت أن المثلث ABC قائم واحسب مساحته .

2) أثبت أن الشعاع $\vec{n}(2,-3,1)$ ناظم على المستوي ABC واستنتج معادلة المستوي (ABC)

3) احسب بعد النقطة D عن المستوي (ABC) ثم احسب حجم رباعي الوجوه (D, ABC)

انتهت الأسئلة

حلـــول النمـــوذج الرابـــع (1)

أولاً – أجب عن الأسئلة الأربعة الآتية : (40° لكل سؤال)

السؤال الأول : تجد جانباً جدول تغيرات التابع f والمطلوب :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

1) ما عدد حلول المعادلة $f(x)=0$.

2) ما عدد القيم الحدية محلياً .

3) اكتب معادلة مماس منحني التابع عند نقطة فاصلتها $x=1$.

1) حل واحد فقط .

2) قيمة كبرى محلياً واحدة .

3) $f(1)=1$ و $f'(1)=0$ معادلة المماس : $y=1$.

السؤال الثاني : حل في C المعادلة $z^2=1+2\sqrt{2}\,i$

بفرض $u=1+2\sqrt{2}\,i$ و $z=x+y\,i$

لدينا : $|u|=\sqrt{(1)^2+\left(2\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{1+8}=3$

$$x^2+y^2=3 \quad \ldots(1)$$
$$x^2-y^2=1 \quad \ldots(2)$$
$$x\,y=\sqrt{2} \quad \ldots(3)$$

بجمع (1) و (2) : $2x^2=4$ أي $x^2=2$

ومنه : $x_1=\sqrt{2}$ نعوض في (3) : $y_1=1$

وبالتالي : $z_1=\sqrt{2}+i$ ومنه $z_2=-\sqrt{2}-i$

طريقة ثانية :

$$z^2=\left(\sqrt{2}\right)^2+(i)^2+2\left(\sqrt{2}\right)(i)$$
$$z^2=\left(\sqrt{2}+i\right)^2 \Rightarrow \begin{cases} z_1=\sqrt{2}+i \\ z_2=-\sqrt{2}-i \end{cases}$$

حلــول النمــوذج الرابــع 2

السؤال الثالث : ليكن التابع f المعرف على $]1,+\infty[$ وفق : $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$

أوجد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم عين A ليكون $x>A$ $f(x)$ من المجال $]1.95\,,2.05[$

إن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$

ينتمي $f(x)$ إلى المجال $]1.95\,,2.05[$ الذي مركزه 2 ونصف قطره 0.05

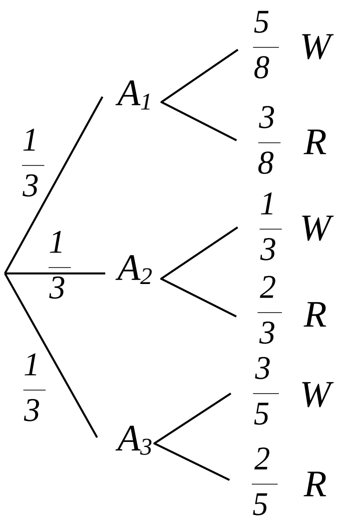
إذا وفقط إذا تحققت المتراجحة : $|f(x)-2|<0.05 \;\ldots\; (1)$

حيث : $f(x)-2=\dfrac{2x+1}{x-1}-2=\dfrac{3}{x-1}$

المتراجحة (1) تكافئ $\dfrac{3}{|x-1|}<\dfrac{1}{20}$ ومنه : $|x-1|>60$

ولما كانت $x>1$ فإن $|x-1|=x-1$ وبالتالي $x-1>60$ ومنه : $x>61$.

السؤال الرابع : في المخطط الشجري المرسوم جانباً .



الرموز $A_1\,,A_2\,,A_3$ تدل على ثلاثة صناديق .

الرمز W يدل على الكرات البيضاء

والرمز R يدل على الكرات الحمراء

يتم اختيار عشوائياً صندوق ثم يتم سحب عشوائياً كرة واحدة منه .

1) ما احتمال أن تكون الكرة المسحوبة حمراء .

2) إذا كانت الكرة المسحوبة حمراء فما احتمال أن تكون من الصندوق الأول A_1 .

1)

$$P(R)=P(A_1\cap R)+P(A_2\cap R)+P(A_3\cap R)$$

$$P(R)=P(A_1)\cdot P(R\setminus A_1)+P(A_2)\cdot P(R\setminus A_2)+P(A_3)\cdot P(R\setminus A_3)$$

$$P(R)=\frac{1}{3}\left(\frac{3}{8}+\frac{2}{3}+\frac{2}{5}\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{45+80+48}{120}\Rightarrow P(R)=\frac{173}{360}$$

2)

$$P(A_1\setminus R)=\frac{P(A_1\cap R)}{P(R)}=\frac{P(A_1)\cdot P(R\setminus A_1)}{P(R)}=\frac{1}{3}\times\frac{3}{8}\times\frac{360}{173}=\frac{45}{173}$$

ثانياً – حل التمارين الأربعة الآتية : (60° لكل تمرين)

التمرين الأول : ليكن C الخط البياني للتابع f التابع المعرف على $R\setminus\{-3\}$ وفق :

$$f(x)=\frac{x^2+2x-2}{x+3}$$

1) اكتب $f(x)$ بالشكل : $f(x)=ax+b+\dfrac{1}{x+3}$ وعين قيمة كلاً من a و b

ثم أثبت أن المستقيم الذي معادلته $y=ax+b$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$.

2) احسب $\int_0^2 f(x)\,dx$.

1) طريقة أولى : بالقسمة الإقليدية نجد أن : $f(x)=x-1+\dfrac{1}{x+3}$

طريقة ثانية : تحليل البسط إلى مجاميع فئات

$$f(x)=\frac{x(x+3)-(x+3)+1}{x+3}=x-1+\frac{1}{x+3}$$

طريقة ثالثة : فرض المقام , بفرض $x+3=t$ ومنه $x=t-3$ نجد :

$$\frac{x^2+2x-2}{x+3}=\frac{t^2-6t+9+2t-6-2}{t}=t-4+\frac{1}{t}$$

إذن : $f(x)=x-1+\dfrac{1}{x+3}$

طريقة رابعة : نوحد مقامات التابع المطلوب ونطابق مع التابع المعطى . إذن : $a=1\ ,\ b=-1$

لدينا : $y=x-1$ و $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}[f(x)-(x-1)]=\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\dfrac{1}{x+3}=0$

إذن : المستقيم الذي معادلته $y=x-1$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$.

2) التكامل : $J=\int_0^2 f(x)\,dx=\int_0^2\left(x-1+\dfrac{1}{x+3}\right)dx$

حيث $x+3>0$ على المجال $[0,2]$

$$J=\left[\frac{1}{2}x^2-x+\ln(x+3)\right]_0^2=[\ln 5]-[\ln 3]=\ln\frac{5}{3}$$

التمرين الثاني : لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$, $u_{n+1} = e\sqrt{u_n}$ و $u_0 = e^3$

v_n متتالية معرفة بالشكل $v_n = ln(u_n) - 2$ والمطلوب :

1) أثبت أن v_n هندسية وعين q, v_0 .

2) اكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n .

3) أثبت أن : $\lim_{n \to +\infty} u_n = e^2$.

1)

$$v_{n+1} = ln(u_{n+1}) - 2 = ln\left(e\sqrt{u_n}\right) - 2$$

$$v_{n+1} = ln e + \frac{1}{2} ln(u_n) - 2 = \frac{1}{2} ln(u_n) - 1$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{2}[ln(u_n) - 2] = \frac{1}{2} v_n$$

إذن $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$

وحدها الأول : $v_0 = ln(u_0) - 2 = 3 - 2 = 1$

2) $v_n = v_0 q^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

لدينا : $ln(u_n) = v_n + 2$ ومنه $ln(u_n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2$

إذن : $u_n = e^2 e^{\left(\frac{1}{2}\right)^n}$

3) بما أن $-1 < \frac{1}{2} < 1$ فإن $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

إذن $\lim_{n \to +\infty} u_n = e^2 e^0 = e^2$

التمرين الثالث : $ABCDEFGH$ مكعب حيث K من CD تحقق : $\overrightarrow{DK}=\frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$

والنقطة $J\in BC$ بحيث $\overrightarrow{BJ}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$ والمطلوب :

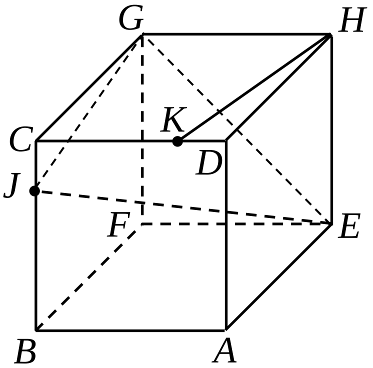
1) جد احداثيات النقط H,E,J,K,G في المعلم $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AD})$

2) أثبت أن الشعاعين $\overrightarrow{EJ}$, $\overrightarrow{EG}$ غير مرتبطين خطياً .

3) أثبت أن الأشعة $\overrightarrow{EJ}$, $\overrightarrow{EG}$, $\overrightarrow{HK}$ مرتبطة خطياً .

4) أثبت أن المستقيم (HK) يوازي المستوي (EGJ) .

1) $G(1,1,1)$ و $H(0,1,1)$ و $E(0,1,0)$



لدينا $4\overrightarrow{DK}=\overrightarrow{DC}$ حيث $D(0,0,1)$ و $C(1,0,1)$

وبالتالي : $4(x,y,z-1)=(1,0,0)$ ومنه $K\left(\frac{1}{4},0,1\right)$

ولدينا $4\overrightarrow{BJ}=3\overrightarrow{BC}$ حيث $B(1,0,0)$ و $C(1,0,1)$

وبالتالي : $4(x-1,y,z)=3(0,0,1)$ ومنه $J\left(1,0,\frac{3}{4}\right)$

* ملاحظة : يمكن إيجاد احداثيات K و J من الرسم .

2) الشعاعين $\overrightarrow{EG}(1,0,1)$ و $\overrightarrow{EJ}\left(1,-1,\frac{3}{4}\right)$ غير مرتبطين خطياً لعدم تناسب مركباتهما

3) لدينا : $\overrightarrow{HK}\left(\frac{1}{4},-1,0\right)$

نلاحظ أن : $\overrightarrow{HK}-\overrightarrow{EJ}=\left(-\frac{3}{4},0,-\frac{3}{4}\right)=-\frac{3}{4}(1,0,1)=-\frac{3}{4}\overrightarrow{EG}$

ومنه : $\overrightarrow{HK}=-\frac{3}{4}\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{EJ}$

إذن الأشعة $\overrightarrow{HK}$ و $\overrightarrow{EG}$ و $\overrightarrow{EJ}$ مرتبطة خطياً .

(يمكن البحث عن a و b يحققان : $\overrightarrow{HK}=a\overrightarrow{EG}+b\overrightarrow{EJ}$)

4) إن $\overrightarrow{EG}$ و $\overrightarrow{EJ}$ غير مرتبطين خطياً (شعاعا توجيه للمستوي (EGJ))

والأشعة $\overrightarrow{HK}$ و $\overrightarrow{EG}$ و $\overrightarrow{EJ}$ مرتبطة خطياً فالمستقيم (HK) يوازي المستوي (EGJ) .

التمرين الرابع : أوجد الحد المستقل عن x في منشور ذي الحدين $\left(x+\frac{1}{x}\right)^8$

$$T_r=\binom{8}{r}(x)^{8-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r=\binom{8}{r}x^{8-2r}$$

$8-2r=0$ ومنه $r=4$

إذن الحد المستقل عن x هو :

$$T_4=\binom{8}{4}=\frac{8\times7\times6\times5}{4\times3\times2\times1}=70$$

ثالثاً – حل المسألتين الآتيتين : (100° لكل مسألة)

المسألة الأولى :

أولاً: ليكن التابع g المعرف على R وفق : $g(x)=e^x+2-x$

ادرس اطراد التابع g واستنتج مجموعة حلول المتراجحة $g(x)>0$

ثانياً: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق $f(x)=x+\frac{x-1}{e^x}$

1) أثبت أن $f'(x)=\frac{1}{e^x}g(x)$

2) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً $0<\alpha<\frac{1}{2}$.

3) أثبت أن المستقيم $\Delta: y=x$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$ وادرس الوضع النسبي .

4) ارسم Δ وارسم C , واحسب مساحة السطح المحصور بين C و Δ والمستقيمين $x=0$ و $x=1$

أولاً: g اشتقاقي على R ومشتقه : $g'(x)=e^x-1$ ينعدم عند $x=0$ حيث $g(0)=3$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘	3	↗

من الجدول نستنتج أن $g(x)\geq3>0$ أياً كانت x من R

ثانياً: لدينا $f(x)=x+(x-1)e^{-x}$

1) نشتق : $f'(x)=1+e^{-x}-e^{-x}(x-1)=1+2e^{-x}-xe^{-x}=e^{-x}\left(e^x+2-x\right)$

إذن : $f'(x)=\frac{1}{e^x}\left(e^x+2-x\right)=\frac{1}{e^x}g(x)$

2) إشارة $f'(x)$ تماثل إشارة $g(x)$ وبما أن $g(x)>0$ فإن $f'(x)>0$ أياً كانت x من R

فالتابع f مستمر ومتزايد تماماً على المجال $\left[0,\frac{1}{2}\right]$

حيث $f(0)=-1<0$ و $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{e}}>0$ ومنه : $f(0)\times f\left(\frac{1}{2}\right)<0$

إذن للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد $0<\alpha<\frac{1}{2}$

3) نضع : $h(x)=f(x)-(x)=\frac{x-1}{e^x}=\frac{x}{e^x}-e^{-x}$

وبما أن : $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\frac{x}{e^x}=0$ و $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}e^{-x}=0$ فإن : $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}h(x)=0$

إذن المستقيم $\Delta: y=x$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$.

إشارة تابع الفرق h تماثل إشارة المقدار $x-1$ الذي ينعدم عند $x=1$ وبالتالي :

عندما $x\in]-\infty,1[$ يكون $h(x)<0$ فيكون C تحت Δ .

عندما $x\in]1,+\infty[$ يكون $h(x)>0$ فيكون C فوق Δ .

ويشترك C و Δ بالنقطة $(1,1)$

4) الرسم والمساحة :

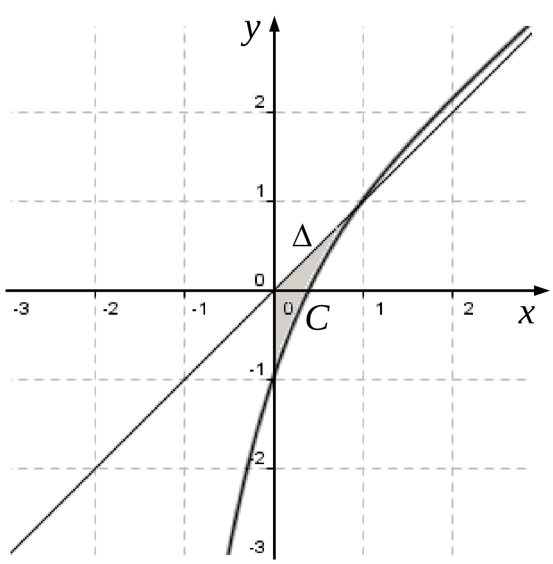
$$A=\int_0^1[(x)-f(x)]dx$$

$$A=\int_0^1-(x-1)e^{-x}\,dx$$

$u(x)=x-1$	$v'(x)=-e^{-x}$
$u'(x)=1$	$v(x)=e^{-x}$

$$A=\left[(x-1)e^{-x}\right]_0^1-\int_0^1 e^{-x}\,dx$$

$$A=1+\left[e^{-x}\right]_0^1\Rightarrow A=1+e^{-1}-1=\frac{1}{e}$$



<u>المسألة الثانية</u> : في الفضاء المنسوب إلى معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, لدينا النقاط :

$A(1,0,-1)$ و $B(2,2,3)$ و $C(3,1,-2)$ و $D(-4,2,1)$ والمطلوب :

1) أثبت أن المثلث ABC قائم واحسب مساحته .

2) أثبت أن الشعاع $\vec{n}(2,-3,1)$ ناظم على المستوي ABC واستنتج معادلة المستوي (ABC)

3) احسب بعد النقطة D عن المستوي (ABC) ثم احسب حجم رباعي الوجوه (D,ABC)

1) لدينا : $\overrightarrow{AB}(1,2,4): AB^2=(1)^2+(2)^2+(4)^2=21$

$\overrightarrow{AC}(2,1,-1): AC^2=(2)^2+(1)^2+(-1)^2=6$

$\overrightarrow{BC}(1,-1,-5): BC^2=(1)^2+(-1)^2+(-5)^2=27$

نلاحظ أن : $AB^2+AC^2=BC^2$ وبالتالي المثلث ABC قائم في A .

مساحته : $S=\frac{1}{2}AB\cdot AC=\frac{1}{2}\sqrt{21}\times\sqrt{6}\Rightarrow S=\frac{3\sqrt{14}}{2}$

2) لدينا : $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=(2)(1)+(-3)(2)+(1)(4)=2-6+4=0$ ومنه : $\vec{n}\perp\overrightarrow{AB}$

أيضاً : $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=(2)(2)+(-3)(1)+(1)(-1)=4-3-1=0$ ومنه : $\vec{n}\perp\overrightarrow{AC}$

إذن : الشعاع $\vec{n}(2,-3,1)$ ناظم على المستوي ABC .

معادلة المستوي ABC :

$2(x-1)-3(y-0)+1(z+1)=0$ ومنه : $2x-3y+z-1=0$

3) $h=dist(D,(ABC))=\frac{|(2)(-4)+(-3)(2)+(1)(1)-1|}{\sqrt{(2)^2+(-3)^2+(1)^2}}$

ومنه : $h=\frac{14}{\sqrt{14}}=\sqrt{14}$ ويمثل ارتفاع رباعي الوجوه (D,ABC)

حجم رباعي الوجوه : $V=\frac{1}{3}S\cdot h$

ومنه : $V=\frac{1}{3}\times\frac{3\sqrt{14}}{2}\times\sqrt{14}=7$

(انتهت حلول النموذج الرابع ونسألكم الدعاء)

الأستاذ : محمد خالد غزول

الأستاذ : عبد الحميد السيد

الجمهورية العربية السورية النموذج الخامس

وزارة التربية الدرجة العظمى : ستمئة

المركز الوطني لتطوير المناهج التربوية المـدة : ثلاث ساعات

نموذج امتحان لمادة الرياضيات الصف الثالث الثانوي العلمي (المنهاج الجديد 2017)

أولاً – أجب عن الأسئلة الأربعة الآتية : (40° لكل سؤال)

السؤال الأول : لتكن $u_n = 4n + 1$ أثبت أن المتتالية حسابية وعين أساسها

واحسب $u_0 + u_1 + u_2 + \ldots\ldots + u_{10}$

السؤال الثاني : اكتب بالشكل المثلثي العدد العقدي : $z = \dfrac{1 - \sqrt{3}\, i}{1 + i}$

السؤال الثالث : رف يحوي 7 كتب لمؤلفين , ثلاثة للمؤلف A وأربعة للمؤلف B :

1) بكم طريقة يمكن ترتيب الكتب على الرف إذا كانت الكتب الثلاثة الأولى للمؤلف B .

2) بكم طريقة يمكن ترتيب الكتب على الرف إذا اشترطنا أن يكون كتاباً معيناً للمؤلف B في البداية .

السؤال الرابع : أوجد الحل المشترك لجملة المعادلتين : $\begin{cases} e^{x} - \dfrac{1}{e} e^{y} = 1 \\ 2e^{x} + e^{y} = 4 + e \end{cases}$

ثانياً – حل التمارين الأربعة الآتية : (60° لكل تمرين)

التمرين الأول : ليكن $g(x) = \tan x$ والمطلوب :

1) احسب $g\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$, $g'(x)$, $g'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ ثم استنتج $\lim\limits_{x \longrightarrow \frac{\pi}{4}} \dfrac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}}$

2) احسب مشتق التابع $f(x) = x\, e^{\frac{1}{x}}$ على $R \setminus \{0\}$.

التمرين الثاني : لتكن المتتاليتين $(y_n)_{n \geq 0}$, $(x_n)_{n \geq 0}$ المعرفتين وفق :

$x_n = \dfrac{4n + 5}{n + 1}$ و $y_n = \dfrac{4n + 1}{n + 2}$. أثبت أن المتتاليتين $(y_n)_{n \geq 0}$, $(x_n)_{n \geq 0}$ متجاورتان .

التمرين الثالث : ليكن كثير الحدود $P(z) = z^4 + 5z^3 + 10z^2 + 10z + 4$

1) عين عددين a و b يحققان $P(z) = \left(z^2 + az + a\right)\left(z^2 + bz + a\right)$

2) حل في C المعادلة $P(z) = 0$.

التمرين الرابع : يشتري محل للأدوات الكهربائية 400 مصباح من المصنع A و 200 مصباح من المصنع B . نعلم أن نسبة المصابيح المعطوبة في انتاج المصنع A هي $40\ \%$ وفي انتاج المصنع B هي $10\ \%$. نسحب عشوائياً مصباحاً :

1) ما احتمال أن يكون المصباح معطوباً .

2) إذا علمت أن المصباح معطوب ما احتمال أن يكون من المصنع B .

ثالثاً – حل المسألتين الآتيتين : (100° لكل مسألة)

المسألة الأولى : ليكن C الخط البياني للتابع $f(x)=\dfrac{x+2}{(x+1)^2}$ المعرف على $R\setminus\{-1\}$

1) ادرس نهايات التابع عند أطراف مجموعة التعريف وبين إذا كانت له نهاية حقيقية عند $x=-1$

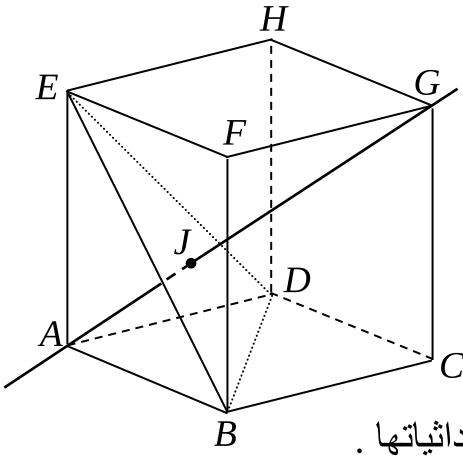
2) أوجد معادلة مقارب أفقي للخط البياني C وادرس الوضع النسبي لهذا المقارب مع C .

3) احسب $f'(x)$ ونظم جدولاً بتغيرات f وعين ما له من قيم حدية محلية .

4) أوجد معادلة المماس في النقطة من C التي فاصلتها $x=-2$.

5) ارسم C واحسب مساحة السطح المحصور بين محوري الإحداثيات والمنحني C والمستقيم $x=3$

المسألة الثانية :



$ABCDEFGH$ مكعب طول ضلعه يساوي 3

1) عين إحداثيات النقاط $D\,,B\,,E\,,G$

في المعلم $\left(A;\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\,,\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}\,,\frac{1}{3}\overrightarrow{AE}\right)$

2) أعطِ تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (AG) .

3) أثبت أن المستقيم (AG) عمودي على المستوي (EDB)

4) المستقيم (AG) يتقاطع مع المستوي (EDB) في J عين إحداثياتها .

5) أثبت أن J هي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث EDB ومركز ثقله .

6) احسب حجم رباعي الوجوه $AEDB$.

انتهت الأسئلة

حلــول النمــوذج الخــامس (1)

أولاً – أجب عن الأسئلة الأربعة الآتية : ($40°$ لكل سؤال)

السؤال الأول : لتكن $u_n = 4n + 1$ أثبت أن المتتالية حسابية وعين أساسها

واحسب $u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_{10}$

$$u_{n+1} - u_n = (4n + 4 + 1) - (4n + 1) = 4$$

ولأن الفرق $u_{n+1} - u_n$ ثابت فالمتتالية حسابية أساسها $r = 4$

عدد حدود المجموع : $n = 10 - 0 + 1 = 11$

الحد الأول : $a = u_0 = 1$ والحد الأخير : $\ell = u_{10} = 41$

المجموع : $S = \frac{n}{2}(a + \ell)$ ومنه $S = 11 \times 21 = 231$

السؤال الثاني : اكتب بالشكل المثلثي العدد العقدي : $z = \frac{1 - \sqrt{3}\, i}{1 + i}$

البسط : $z_1 = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$

المقام : $z_2 = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} i\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4}\right)$

$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ و $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = -\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = -\frac{7\pi}{12}$

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right) + i \sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right)\right)$$

السؤال الثالث : رف يحوي 7 كتب لمؤلفين , ثلاثة للمؤلف A وأربعة للمؤلف B :

1) بكم طريقة يمكن ترتيب الكتب على الرف إذا كانت الكتب الثلاثة الأولى للمؤلف B .

2) بكم طريقة يمكن ترتيب الكتب على الرف إذا اشترطنا أن يكون كتاباً معيناً للمؤلف B في البداية .

1) يتم ترتيب 3 كتب أولى للمؤلف B بعدد طرائق يساوي : $P_4^3 = 4 \times 3 \times 2 = 24$

يبقى 4 كتب للمؤلفين ويتم ترتيبها بعدد طرائق يساوي : $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

حسب المبدأ الأساسي في العد يكون عدد الطرائق الكلية مساوياً : $24 \times 24 = 576$

الأستاذ : محمــد خالــد غــزول   الأستاذ : عبــد الحميــد السيــد

2) ترتيب كتاب معين للمؤلف B في البداية يتم بطريقة واحدة

يبقى 6 كتب للمؤلفين يتم ترتيبهم بعدد طرائق يساوي : $720 = 1\times 2\times 3\times 4\times 5\times 6 = 6\,!$

حسب المبدأ الأساسي في العد يكون عدد الطرائق الكلية مساوياً : $720 = 720\times 1$

<u>السؤال الرابع</u> : أوجد الحل المشترك لجملة المعادلتين :
$$\begin{cases} e^{x} - \frac{1}{e}e^{y} = 1 \\ 2e^{x} + e^{y} = 4 + e \end{cases}$$

نضرب طرفي الأولى بـ e فنجد : $e\cdot e^{x} - e^{y} = e$

نجمعها مع الثانية فنجد : $(e+2)e^{x} = 4 + 2e = 2(e+2)$

ومنه : $e^{x} = 2$, إذن $x = \ln 2$

نعوض في الثانية : $4 + e^{y} = 4 + e$

ومنه $e^{y} = e$, إذن $y = 1$

ثانياً – <u>حل التمارين الأربعة الآتية</u> : (60° لكل تمرين)

<u>التمرين الأول</u> : ليكن $g(x) = \tan x$ والمطلوب :

1) احسب $g\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $g'(x)$, $g'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ ثم استنتج $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}}$

2) احسب مشتق التابع $f(x) = x\, e^{\frac{1}{x}}$ على $R\setminus\{0\}$.

1) $g\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ و $g'(x) = 1 + \tan^2 x$ و $g'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{g(x) - g\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x - \frac{\pi}{4}} = g'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$$

2) $f'(x) = e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\times x = \left(1 - \frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}$

التمرين الثاني : لتكن المتتاليتين $(x_n)_{n\geq 0}$, $(y_n)_{n\geq 0}$ المعرفتين وفق :

$x_n = \frac{4n+5}{n+1}$ و $y_n = \frac{4n+1}{n+2}$. أثبت أن المتتاليتين $(y_n)_{n\geq 0}$, $(x_n)_{n\geq 0}$ متجاورتان .

$$x_{n+1} - x_n = \frac{4n+9}{n+2} - \frac{4n+5}{n+1} = \frac{4n^2+13n+9-4n^2-13n-10}{(n+2)(n+1)} = \frac{-1}{(n+2)(n+1)} < 0$$

إذن المتتالية $(x_n)_{n\geq 0}$ متناقصة تماماً

$$y_{n+1} - y_n = \frac{4n+5}{n+3} - \frac{4n+1}{n+2} = \frac{4n^2+13n+10-4n^2-13n-3}{(n+3)(n+2)} = \frac{7}{(n+3)(n+2)} > 0$$

إذن المتتالية $(y_n)_{n\geq 0}$ متزايدة تماماً

$$x_n - y_n = \frac{4n+5}{n+1} - \frac{4n+1}{n+2} : \lim_{n\longrightarrow+\infty} (x_n - y_n) = 4 - 4 = 0$$

مما سبق نستنتج أن المتتاليتين $(y_n)_{n\geq 0}$, $(x_n)_{n\geq 0}$ متجاورتان .

التمرين الثالث : ليكن كثير الحدود $P(z) = z^4 + 5z^3 + 10z^2 + 10z + 4$

1) عين عددين a و b يحققان $P(z) = \left(z^2 + az + a\right)\left(z^2 + bz + a\right)$

2) حل في C المعادلة $P(z) = 0$.

1) $P(z) = z^4 + bz^3 + az^2 + az^3 + abz^2 + a^2z + az^2 + abz + a^2$

$$P(z) = z^4 + (a+b)z^3 + (2a+ab)z^2 + \left(a^2+ab\right)z + a^2$$

بالمطابقة نجد :

$$\begin{cases} a+b=5 & \dots(1) \\ a(2+b)=10 & \dots(2) \\ a(a+b)=10 & \dots(3) \\ a^2=4 & \dots(4) \end{cases}$$

نعوض (1) في (3) فنجد : $5a = 10 \Rightarrow a = 2$

إذن $(a,b) = (2,3)$ حل مشترك لجملة المعادلتين (1) و (3) .

نعوض في (2) : $2(2+3)=10$ فهو حل للمعادلة (2)

نعوض في (4) : $4=(2)^2$ فهو حل للمعادلة (4)

إذن : $(a,b)=(2,3)$

2) أصبح كثير الحدود : $P(z)=\left(z^2+2z+2\right)\left(z^2+3z+2\right)$

حل المعادلة $P(z)=0$ يكافئ حل المعادلتين الآتيتين :

$$1)\ z^2+2z+2 \Rightarrow z^2+2z+1-1+2=0$$

$$(z+1)^2=-1=i^2 \Rightarrow \begin{cases} z_1=-1-i \\ z_2=-1+i \end{cases}$$

$$2)\ z^2+3z+2=0 \Rightarrow z^2+3z+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}+2=0$$

$$\left(z+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases} z_3=-2 \\ z_4=-1 \end{cases}$$

<u>التمرين الرابع</u> : يشتري محل للأدوات الكهربائية 400 مصباح من المصنع A و 200 مصباح من المصنع B . نعلم أن نسبة المصابيح المعطوبة في انتاج المصنع A هي $40\ \%$ وفي انتاج المصنع B هي $10\ \%$. نسحب عشوائياً مصباحاً :

1) ما احتمال أن يكون المصباح معطوباً .

2) إذا علمت أن المصباح معطوب ما احتمال أن يكون من المصنع B .

1) نسبة المصابيح المصنعة في المصنع A : $\frac{400}{400+200}=\frac{2}{3}$, وفي المصنع B : $1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

نرمز بالرمز D لحدث أن يكون المصباح معطوباً عندئذ :

$$P(D)=P(D\cap A)+P(D\cap B)$$

$$P(D)=P(A)\cdot P(D\setminus A)+P(B)\cdot P(D\setminus B)$$

$$P(D)=\frac{2}{3}\times\frac{4}{10}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{10} \Rightarrow P(D)=\frac{3}{10}=0.3$$

2) الاحتمال المطلوب : $P(B\setminus D)=\frac{P(D\cap B)}{P(D)}=\frac{1}{30}\times\frac{10}{3} \Rightarrow P(B\setminus D)=\frac{1}{9}$

ثالثاً – حل المسألتين الآتيتين : (100° لكل مسألة)

المسألة الأولى : ليكن C الخط البياني للتابع $f(x)=\dfrac{x+2}{(x+1)^2}$ المعرف على $R\setminus\{-1\}$

1) ادرس نهايات التابع عند أطراف مجموعة التعريف وبين إذا كانت له نهاية حقيقية عند $x=-1$

2) أوجد معادلة مقارب أفقي للخط البياني C وادرس الوضع النسبي لهذا المقارب مع C .

3) احسب $f'(x)$ ونظم جدولاً بتغيرات f وعين ما له من قيم حدية محلية .

4) أوجد معادلة المماس في النقطة من C التي فاصلتها $x=-2$.

5) ارسم C واحسب مساحة السطح المحصور بين محوري الإحداثيات والمنحني C والمستقيم $x=3$

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

$\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x)=+\infty$ ومنه $\lim\limits_{x\to-1} f(x)=+\infty$

ليس للتابع نهاية حقيقية عند $x=-1$.

(للخط البياني C مقارب شاقولي معادلته $x=-1$)

2) المستقيم d الذي معادلته $y=0$ مقارب أفقي للخط C في جوار $-\infty$ وفي جوار $+\infty$.

تابع الفرق : $f(x)-y=\dfrac{x+2}{(x+1)^2}$ إشارته تماثل إشارة $x+2$ الذي ينعدم عند $x=-2$

عندما $x\in]-\infty,-2[$ يكون $f(x)-y<0$ فيكون C تحت المقارب d .

عندما $x\in]-2,+\infty[\setminus\{-1\}$ يكون $f(x)-y>0$ فيكون C فوق المقارب d .

يشترك C و d بالنقطة $A(-2,0)$.

3) f اشتقاقي على كل من المجالين $]-\infty,-1[$ و $]-1,+\infty[$ ومشتقه :

$$f'(x)=\frac{(x+1)^2-2(x+1)(x+2)}{(x+1)^4}$$

$$=\frac{(x+1)(-x-3)}{(x+1)^4}$$

$$f'(x)=\frac{-x^2-4x-3}{(x+1)^4}$$

إشارة المشتق تماثل إشارة المقدار $-x^2-4x-3$

الذي ينعدم عند $x=-1\notin D_f$ أو عند $x=-3\in D_f$ حيث $f(-3)=-0.25$

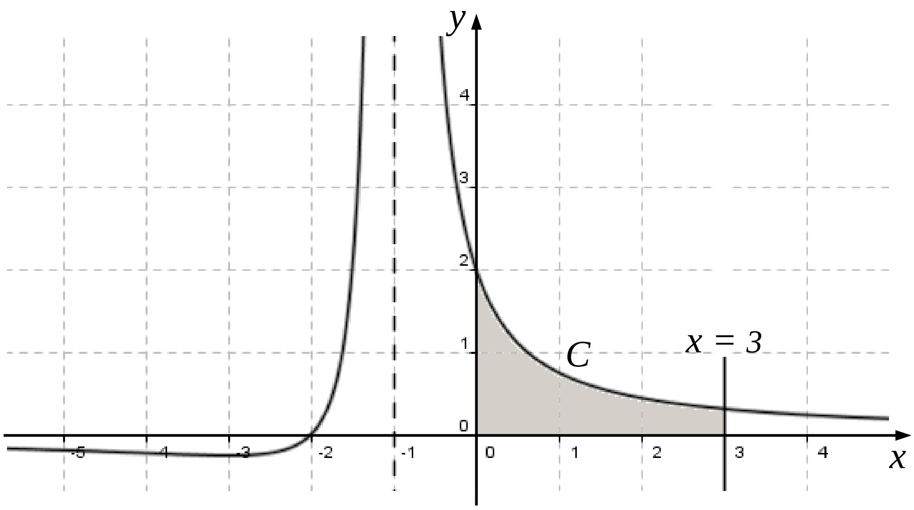
x	$-\infty$ $\quad -3 \quad$ -1 $\quad +\infty$
$f'(x)$	$-$ $\quad 0 \quad$ $+$ $\quad \Vert \quad$ $-$
$f(x)$	$0 \searrow -0.25 \nearrow +\infty \ \Vert\ +\infty \searrow 0$

للتابع قيمة صغرى محلياً تساوي -0.25 يبلغها التابع عند $x=-3$

4) نقطة التماس $A(-2,0)$ و $f'(-2)=1$

معادلة المماس من الشكل : $y=f(-2)+f'(-2)(x+2)$ ومنه $y=x+2$

5) الرسم والمساحة : نقطة مساعدة $(0,2)\in C$



الخط C يقع فوق محور الفواصل على المجال $[0,3]$:

$$f(x)=\frac{x+1+1}{(x+1)^2}=\frac{1}{x+1}+(x+1)^{-2}$$

$$A=\int_0^3 f(x)\,dx=\int_0^3\left[\frac{1}{x+1}+(x+1)^{-2}\right]dx$$

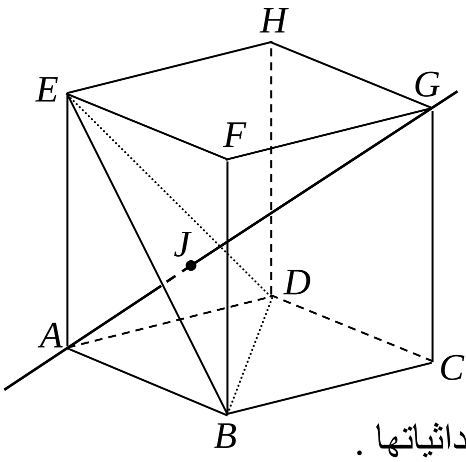
$$x\in[0,3]\Rightarrow x+1>0$$

$$A=\left[\ln(x+1)-\frac{1}{x+1}\right]_0^3$$

$$A=\left(\ln 4-\frac{1}{4}\right)-(0-1)\Rightarrow A=\frac{3}{4}+\ln 4$$

المسألة الثانية :

$ABCDEFGH$ مكعب طول ضلعه يساوي 3



1) عين إحداثيات النقاط D , B , E , G

في المعلم $\left(A ; \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} , \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} , \frac{1}{3}\overrightarrow{AE} \right)$

2) أعطِ تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (AG) .

3) أثبت أن المستقيم (AG) عمودي على المستوي (EDB)

4) المستقيم (AG) يتقاطع مع المستوي (EDB) في J عين إحداثياتها .

5) أثبت أن J هي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث EDB ومركز ثقله .

6) احسب حجم رباعي الوجوه $AEDB$.

1) $B(3,0,0) , D(0,3,0) , E(0,0,3) , G(3,3,3)$

2) لدينا $\overrightarrow{AG}(3,3,3)$ شعاع موجه للمستقيم (AG)

وبالتالي نجد تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (AG) :

$$(AG)\begin{cases} x = 3t \\ y = 3t \quad : t \in R \\ z = 3t \end{cases}$$

2) لدينا $\overrightarrow{EB}(3,0,-3)$ و $\overrightarrow{ED}(0,3,-3)$ شعاعا توجيه للمستوي (EDB)

وهما غير مرتبطين خطياً لعدم تناسب مركبتاهما .

$$\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{ED} = 0 + 9 - 9 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AG} \perp \overrightarrow{ED}$$
$$\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{EB} = 9 + 0 - 9 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AG} \perp \overrightarrow{EB}$$

إذن : المستقيم (AG) عمودي على المستوي (EDB)

4) لدينا : $\overrightarrow{AG}(3,3,3)$ شعاع ناظم على المستوي (EDB) الذي معادلته من الشكل :

$$ax + by + cz + d = 0 \text{ ومنه } 3x + 3y + 3z + d = 0$$

$$E \in (EDB) : 0 + 0 + 9 + d = 0 \Rightarrow d = -9$$

إذن معادلة المستوي (EDB) هي : $x + y + z - 3 = 0$

نعوض معادلات (AG) في معادلة (EDB) : $3t+3t+3t-3=0$

ومنه : $t=\frac{1}{3}$ وبالتالي $J(1,1,1)$

5) المثلث EDB متساوي الأضلاع لأن أضلاعه هي أقطار مربعات طبوقة .

وبالتالي ارتفاعاته هي متوسطات .

بفرض I نقطة تلاقي متوسطات المثلث EDB فهي مركز ثقله وإحداثياتها :

$$I\left(\frac{0+0+3}{3},\frac{0+3+0}{3},\frac{3+0+0}{3}\right)\Rightarrow I(1,1,1)$$

ومنه $I=J$, إذن J نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث EDB ومركز ثقله أيضاً

- <u>طريقة ثانية</u> لإثبات J نقطة تلاقي الارتفاعات نثبت أن :

$$\overrightarrow{BJ}\cdot\overrightarrow{ED}=0 \ ,\overrightarrow{DJ}\cdot\overrightarrow{EB}=0 \ ,\overrightarrow{EJ}\cdot\overrightarrow{DB}=0$$

6) حجم رباعي الوجوه : $V=\frac{1}{3}S(ABD)\cdot AE$ حيث : $AE=3$

ومساحة المثلث ABD القائم في A هي : $S(ABD)=\frac{1}{2}AB\cdot AD=\frac{9}{2}$

وبالتالي : $V=\frac{1}{3}\times\frac{9}{2}\times 3$, إذن : $V=\frac{9}{2}$

- طريقة ثانية لحساب حجم رباعي الوجوه من $V=\frac{1}{3}S(EDB)\cdot AJ$

(انتهت حلول النموذج الوزاري الخامس)

الأستاذ : محمــد خالــد غــزول **الأستاذ : عبــد الحميــد السيــد**

الجمهورية العربية السورية النموذج السادس

وزارة التربية الدرجة العظمى : ستمئة

المركز الوطني لتطوير المناهج التربوية المـدة : ثلاث ساعات

نموذج امتحان لمادة الرياضيات الصف الثالث الثانوي العلمي (المنهاج الجديد 2017)

أولاً – أجب عن الأسئلة الأربعة الآتية : (40° لكل سؤال)

السؤال الأول : تجد فيما يأتي جدول تغيرات التابع f والذي خطه البياني C والمطلوب :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	‖ $-$	‖ $-$	
$f(x)$	$3 \nearrow +\infty$	‖ $+\infty \searrow -\infty$	‖ $+\infty \searrow 3$	

1) اكتب معادلة كل مقارب شاقولي أو أفقي للخط البياني C .

2) هل يوجد مقاربات مائلة للخط البياني C ؟

3) هل يوجد للخط C مماسات أفقية ؟

4) أثبت أن للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد في المجال $]-1,1[$.

السؤال الثاني : اكتب العدد العقدي $z=\left(1-\sqrt{2}\right)\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ بالشكل الأسي

السؤال الثالث : $ABCD$ رباعي وجوه و G مركز ثقل المثلث DBC

جد مجموعة نقاط الفراغ التي تحقق :

$$\|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MC}\|=\|3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{MC}\|$$

السؤال الرابع : ليكن التابع f المعرف على R وفق $f(x)=e^x$

احسب $f(\ln 2)$ و $f'(\ln 2)$, ثم استنتج $\lim\limits_{x\longrightarrow \ln 2}\dfrac{e^x-2}{x-\ln 2}$

ثانياً – حل التمارين الأربعة الآتية : (60° لكل تمرين)

التمرين الأول : لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة كما يأتي : $u_0=0\,,\,u_{n+1}=\dfrac{2u_n+1}{u_n+2}$

1) أثبت أن $0\leq u_n\leq 1$.

2) أثبت أن $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة .

3) علل تقارب المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ واحسب نهايتها .

يتبع في الصفحة الثانية

التمرين الثاني : صندوق يحوي خمس كرات حمراء وخمس كرات خضراء .

نسحب عشوائياً من الصندوق ثلاث كرات معاً .

نتأمل المتحول العشوائي X الذي يأخذ القيمة 5 إذا كانت نتيجة السحب ثلاث كرات حمراء ويأخذ القيمة 3 إذا كانت نتيجة السحب كرتان حمراوان وكرة خضراء والقيمة صفر في غير ذلك

عين القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي X واحسب توقعه وتباينه .

التمرين الثالث : أوجد الحد المستقل عن x في منشور ذي الحدين $\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^6$

التمرين الرابع : عين مجموعة تعريف التابع $f(x)=\frac{\sin x}{\sqrt{1+x}-1}$ واحسب نهايته عند الصفر

ثالثاً – حل المسألتين الآتيتين : (100° لكل مسألة)

المسألة الأولى : ليكن التابع f المعرف على R وفق : $f(x)=\frac{x^2}{e^x}$

1) أوجد نهايات التابع f عند أطراف مجموعة التعريف .

2) ادرس اطراد التابع f ونظم جدولاً بها .

3) بين القيم الحدية المحلية للتابع f . وارسم خطه البياني C .

4) استنتج عدد حلول المعادلة $x^2e^{-x}=1$.

5) احسب مساحة السطح المحصور بين C ومحور الفواصل والمستقيم $x=1$.

المسألة الثانية : نتأمل النقطتين $A(1,1,1)$ و $B(3,2,0)$ في الفراغ المنسوب إلى معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ليكن P المستوي المار بالنقطة B ويقبل $\overrightarrow{AB}$ شعاعاً ناظماً , وليكن المستوي Q الذي معادلته $x-y+2z+4=0$. وأخيراً لتكن S الكرة التي مركزها A ونصف قطرها AB .

1) أثبت أن $2x+y-z-8=0$ هي معادلة المستوي P .

2) جد معادلة الكرة S . 3) أثبت أن المستوي Q مستوي مماس للكرة S .

4) أثبت أن النقطة $C(0,2,-1)$ هي مسقط النقطة A على المستوي Q .

5) ليكن d المستقيم الذي يقبل تمثيلاً وسيطياً $d:\begin{cases} x=t \\ y=12-5t \ , t\in R \\ z=4-3t \end{cases}$

(a) أثبت أن المستقيم d هو الفصل المشترك للمستويين P و Q .

(b) أثبت أن المستقيم d محتوى في المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[BC]$.

انتهت الأسئلة

حلـــول النمـــوذج الســـادس ①

أولاً – أجب عن الأسئلة الأربعة الآتية : (40° لكل سؤال)

السؤال الأول : تجد فيما يأتي جدول تغيرات التابع f والذي خطه البياني C والمطلوب :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	‖ $-$	‖ $-$	
$f(x)$	$3 \nearrow +\infty$	‖ $+\infty \searrow -\infty$	‖ $+\infty \searrow 3$	

1) اكتب معادلة كل مقارب شاقولي أو أفقي للخط البياني C .

2) هل يوجد مقاربات مائلة للخط البياني C ؟

3) هل يوجد للخط C مماسات أفقية ؟

4) أثبت أن للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد في المجال $]-1,1[$.

1) المستقيم الذي معادلته $x=-1$ مقارب شاقولي للخط C .

المستقيم الذي معادلته $x=1$ مقارب شاقولي للخط C .

المستقيم الذي معادلته $y=3$ مقارب أفقي للخط C .

2) لا يوجد .

3) لا يوجد .

4) التابع f مستمر ومتناقص تماماً على المجال $]-1,1[$ و $0 \in f(]-1,1[)=R$

إذن للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد في المجال $]-1,1[$.

السؤال الثاني : اكتب العدد العقدي $z=\left(1-\sqrt{2}\right)\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ بالشكل الأسي

$$z=-\left(\sqrt{2}-1\right)e^{i\frac{\pi}{3}}=\left(\sqrt{2}-1\right)e^{i\pi}\times e^{i\frac{\pi}{3}}=\left(\sqrt{2}-1\right)e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

السؤال الثالث : $ABCD$ رباعي وجوه و G مركز ثقل المثلث DBC

جد مجموعة نقاط الفراغ التي تحقق

$$\|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MC}\|=\|3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{MC}\|$$

لدينا G مركز ثقل المثلث BCD

وبالتالي أياً كانت النقطة M من الفراغ فإن : $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$

ولدينا : $\|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MC}\|=\|3\overrightarrow{MA}-(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MC})\|$

وبالتالي : $\|3\overrightarrow{MG}\|=\|3\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MG}\|$

ومنه : $\|\overrightarrow{MG}\|=\|\overrightarrow{GA}\|$ حيث G و A نقطتين ثابتتين .

أي أن M تبعد عن G بعداً ثابتاً يساوي $\|\overrightarrow{GA}\|$

إذن : مجموعة نقاط الفراغ M هي كرة مركزها G وطول نصف قطرها $\|\overrightarrow{GA}\|$

السؤال الرابع : ليكن التابع f المعرف على R وفق $f(x)=e^{x}$

احسب $f(ln2)$ و $f'(ln2)$, ثم استنتج $\lim\limits_{x\longrightarrow ln2}\dfrac{e^{x}-2}{x-ln2}$

$f(ln2)=e^{ln2}=2$ ولأن $f'(x)=e^{x}$ فإن $f'(ln2)=2$

$$\lim_{x\longrightarrow ln2}\frac{e^{x}-2}{x-ln2}=\lim_{x\longrightarrow ln2}\frac{f(x)-f(ln2)}{x-ln2}=f'(ln2)=2$$

ثانياً – حل التمارين الأربعة الآتية : (°60 لكل تمرين)

التمرين الأول : لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ المعرفة كما يأتي : $u_0=0\ ,\ u_{n+1}=\dfrac{2u_n+1}{u_n+2}$

1) أثبت أن $0\leq u_n\leq1$.

2) أثبت أن $(u_n)_{n\geq0}$ متزايدة .

3) علل تقارب المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ واحسب نهايتها .

1) نفترض $E(n)$ هي الخاصة : « $0\leq u_n\leq1$ »

(1) الخاصة $E(0)$ صحيحة لأن : $0\leq u_0=0\leq1$.

(2) نفترض أن $E(n)$ صحيحة أي : $0\leq u_n\leq1$

ولنبرهن أن $E(n+1)$ صحيحة أي لنبرهن أن $0\leq u_{n+1}\leq1$

لدينا : $u_{n+1}=\dfrac{2u_n+4-3}{u_n+2}=2-\dfrac{3}{u_n+2}$

$$0 \le u_n \le 1 \Rightarrow 2 \le u_n + 2 \le 3 \Rightarrow \frac{1}{2} \ge \frac{1}{u_n + 2} \ge \frac{1}{3}$$

$$\frac{-3}{2} \le \frac{-3}{u_n + 2} \le -1 \Rightarrow \frac{1}{2} \le 2 - \frac{3}{u_n + 2} \le 1$$

ومنه $0 \le u_{n+1} \le 1$ فالخاصة $E(n+1)$ صحيحة

مما سبق نستنتج أن $0 \le u_n \le 1$ أياً كان العدد الطبيعي n

طريقة ثانية : لإثبات صحة $E(n+1)$

ليكن التابع f المعرف وفق $f(x) = \frac{2x+1}{x+2}$

وهو اشتقاقي على كل من المجالين $]-\infty, -2[$ و $]-2, +\infty[$ ومشتقه :

$$f'(x) = \frac{2x + 4 - 2x - 1}{(x+2)^2} = \frac{3}{(x+2)^2} > 0$$

فالتابع f متزايد تماماً على كل من المجالين $]-\infty, -2[$ و $]-2, +\infty[$

لدينا : $0 \le u_n \le 1$

وبالاستفادة من تزايد التابع f على المجال $]-2, +\infty[$

نستنتج أن : $f(0) \le f(u_n) \le f(1)$

وبما أن : $f(0) = \frac{1}{2}$ و $f(1) = 1$

فإن : $\frac{1}{2} \le u_{n+1} \le 1$ ومنه $0 \le u_{n+1} \le 1$ وبالتالي $E(n+1)$ صحيحة

2) الاطراد : $u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n + 1}{u_n + 2} - u_n = \frac{1 - u_n^2}{u_n + 2}$

بما أن $0 \le u_n \le 1$ فإن : $1 - u_n^2 \ge 0$ و $u_n + 2 > 0$

ومنه : $u_{n+1} - u_n \ge 0$

إذن المتتالية $(u_n)_{n \ge 0}$ متزايدة

3) المتتالية محدودة من الأعلى بالعدد 1 ومتزايدة فهي متقاربة من عدد حقيقي ℓ .

لما كان $u_0=0$ والمتتالية متزايدة فإن حدودها موجبة ومنه $\ell \geq 0$

نأخذ التابع f المعرف وفق $f(x)=\dfrac{2x+1}{x+2}$

وهو تابع مستمر على $]-2,+\infty[$ وبالتالي مستمر عند ℓ .

إذن ℓ هو حل موجب للمعادلة $f(x)=x$

$$\frac{2x+1}{x+2}=x \Rightarrow x^2=1$$ والحل المقبول $x=1$

إذن نهاية المتتالية هي : $\ell=1$

<u>التمرين الثاني</u> : صندوق يحوي خمس كرات حمراء وخمس كرات خضراء .

نسحب عشوائياً من الصندوق ثلاث كرات معاً .

نتأمل المتحول العشوائي X الذي يأخذ القيمة 5 إذا كانت نتيجة السحب ثلاث كرات حمراء ويأخذ القيمة 3 إذا كانت نتيجة السحب كرتان حمراوان وكرة خضراء والقيمة صفر في غير ذلك

عين القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي X واحسب توقعه وتباينه .

$$P(X=5)=\frac{\binom{5}{3}}{\binom{10}{3}}=\frac{10}{120}=\frac{1}{12} \quad \text{و} \quad P(X=3)=\frac{\binom{5}{2}\times\binom{5}{1}}{\binom{10}{3}}=\frac{10\times 5}{120}=\frac{5}{12}$$

$$P(X=0)=1-[P(X=3)+P(X=5)]=1-\frac{6}{12}=\frac{6}{12}$$

x	0	3	5
$P(X=x)$	$\frac{6}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{12}$

التوقع : $$E(X)=\frac{1}{12}(0\times 6+3\times 5+5\times 1)\Rightarrow E(X)=\frac{20}{12}=\frac{5}{3}$$

$$E\left(X^2\right)=\frac{1}{12}(0\times 6+9\times 5+25\times 1)\Rightarrow E\left(X^2\right)=\frac{70}{12}=\frac{35}{6}$$

التباين : $$V(X)=E\left(X^2\right)-(E(X))^2=\frac{35}{6}-\frac{25}{9}\Rightarrow V(X)=\frac{55}{18}$$

التمرين الثالث : أوجد الحد المستقل عن x في منشور ذي الحدين $\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^6$

$$T_r=\binom{6}{r}\left(x^2\right)^{6-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r$$

$$T_r=\binom{6}{r}x^{12-2r}\cdot x^{-r}=\binom{6}{r}x^{12-3r}$$

$12-3r=0$ ومنه $r=4$

إذن الحد المستقل عن x هو :

$$T_4=\binom{6}{4}=\binom{6}{2}=\frac{6\times 5}{2}=15$$

التمرين الرابع : عين مجموعة تعريف التابع $f(x)=\frac{\sin x}{\sqrt{1+x}-1}$ واحسب نهايته عند الصفر

($1+x\geq 0$ و $1+x\neq 1$)

ومنه ($x\geq -1$ و $x\neq 0$)

$$D_f=[-1,0[\cup]0,+\infty[$$

$$f(x)=\frac{\left(\sqrt{1+x}+1\right)\sin x}{1+x-1}=\left(\sqrt{1+x}+1\right)\frac{\sin x}{x}$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0}f(x)=(2)(1)=2$$

ثالثاً – <u>حل المسألتين الآتيتين</u> : (100° لكل مسألة)

<u>المسألة الأولى</u> : ليكن التابع f المعرف على R وفق : $f(x)=\frac{x^2}{e^x}$

1) أوجد نهايات التابع f عند أطراف مجموعة التعريف .

2) ادرس اطراد التابع f ونظم جدولاً بها .

3) بين القيم الحدية المحلية للتابع f . وارسم خطه البياني C .

4) استنتج عدد حلول المعادلة $x^2e^{-x}=1$.

5) احسب مساحة السطح المحصور بين C ومحور الفواصل والمستقيم $x=1$.

1) لدينا : $f(x)=\frac{x^2}{e^x}=x^2e^{-x}$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x^2e^{-x}=0$$ و $$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{e^x}=+\infty$$

2) المشتق : $f'(x)=2x\,e^{-x}-e^{-x}x^2=\left(2x-x^2\right)e^{-x}$ إشارته تماثل إشارة $2x-x^2$

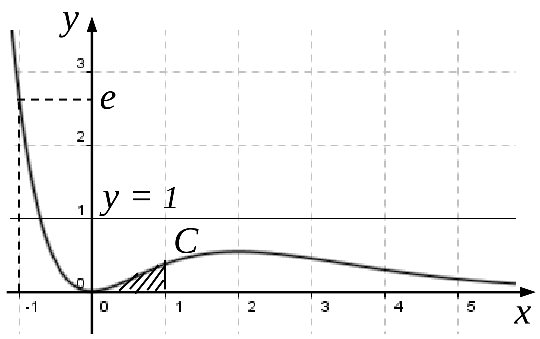
$$f'(x)=0\Rightarrow x(2-x)=0$$

$$x=0\ ,f(0)=0\ ,x=2\ ,f(2)=\frac{4}{e^2}$$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{e^2}$	$\searrow$	0

3) $f(0)=0$ قيمة صغرى محلياً و $f(2)=\frac{4}{e^2}$ قيمة كبرى محلياً .

نقطة مساعدة للرسم : $f(-1)=e$



4) بيانياً نلاحظ أن المستقيم الذي معادلته $y=1$

يقطع الخط البياني C بنقطة واحدة .

للمعادلة $f(x)=x^2e^{-x}=1$ حل وحيد في R .

(يمكن الإثبات حسب مبرهنة)

5) $f(x) \geq 0$ على المجال $[0,1]$

فالمساحة المطلوبة : $A = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 x^2 e^{-x}\,dx$

التكامل بالتجزئة :

$u(x) = x^2$	$v'(x) = e^{-x}$
$u'(x) = 2x$	$v(x) = -e^{-x}$

$$A = \left[-x^2 e^{-x}\right]_0^1 + \int_0^1 2x\,e^{-x}\,dx$$

$$I = \int_0^1 2x\,e^{-x}\,dx$$

$u_1(x) = 2x$	$v_1'(x) = e^{-x}$
$u_1'(x) = 2$	$v_1(x) = -e^{-x}$

$$I = \left[-2x\,e^{-x}\right]_0^1 + \int_0^1 2e^{-x}\,dx$$

$$I = \left[-2x\,e^{-x}\right]_0^1 + \left[-2e^{-x}\right]_0^1$$

$$A = \left[-\left(x^2 + 2x + 2\right)e^{-x}\right]_0^1$$

$$A = \left[-(1+2+2)e^{-1}\right] - \left[-(0+0+2)e^{0}\right]$$

$$A = 2 - \frac{5}{e}$$

<u>المسألة الثانية</u> : نتأمل النقطتين $A\,(1,1,1)$ و $B\,(3,2,0)$ في الفراغ المنسوب إلى معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ليكن P المستوي المار بالنقطة B ويقبل $\overrightarrow{AB}$ شعاعاً ناظماً , وليكن المستوي Q الذي معادلته $x-y+2z+4=0$. وأخيراً لتكن S الكرة التي مركزها A ونصف قطرها AB .

1) أثبت أن $2x+y-z-8=0$ هي معادلة المستوي P .

2) جد معادلة الكرة S .

3) أثبت أن المستوي Q مستوي مماس للكرة S .

4) أثبت أن النقطة $C\,(0,2,-1)$ هي مسقط النقطة A على المستوي Q .

5) ليكن d المستقيم الذي يقبل تمثيلاً وسيطياً $d:\begin{cases} x=t \\ y=12-5t\ ,t\in R \\ z=4-3t \end{cases}$

(a) أثبت أن المستقيم d هو الفصل المشترك للمستويين P و Q .

(b) أثبت أن المستقيم d محتوى في المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[BC]$.

1) لدينا $\vec{n}_P=\overrightarrow{AB}\,(2,1,-1)$ شعاعاً ناظماً للمستوي P .

<u>طريقة أولى</u> : معادلة P من الشكل : $a(x-x_B)+b(y-y_B)+c(z-z_B)=0$

نعوض : $2(x-3)+1(y-2)-1(z-0)=0$

إذن معادلة P هي : $2x+y-z-8=0$

<u>طريقة ثانية</u> : معادلة P من الشكل : $ax+by+cz+d=0$

ومنه $2x+y-z+d=0$

نعوض إحداثيات B : $6+2-0+d=0\Rightarrow d=-8$

إذن معادلة P هي : $2x+y-z-8=0$

2) معادلة الكرة من الشكل : $(x-x_A)^2+(y-y_A)^2+(z-z_A)^2=r^2$

طول نصف قطرها : $r=AB=\sqrt{(2)^2+(1)^2+(-1)^2}=\sqrt{6}$

إذن معادلة S هي : $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=6$

3) نحسب بعد A عن Q : $dist\,(A,Q)=\frac{|(1)(1)+(1)(-1)+(1)(2)+4|}{\sqrt{(1)^2+(1)^2+(2)^2}}=\frac{6}{\sqrt{6}}=\sqrt{6}$

بما أن : $dist\,(A,Q)=r$ فإن المستوي Q مماس للكرة S .

4) المستوي Q يمس الكرة S بنقطة وحيدة .

<u>طريقة أولى</u> : تكون C مسقط A على Q إذا تحقق : $C\in Q$ و $AC=r$

نتحقق من وقوع C في المستوي Q : $(0)-(2)+2(-1)+4=0$ محقق ومنه $C\in Q$

من جهة أخرى : $AC=\sqrt{(-1)^2+(1)^2+(-2)^2}=\sqrt{6}=r$

إذن : C مسقط A على Q .

<u>طريقة ثانية</u> : نبرهن أن : $C\in Q$ و $C\in S$

<u>طريقة ثالثة</u> : نبرهن أن : $C\in Q$ و الشعاعان $\vec{n}_Q$ و $\overrightarrow{AC}$ مرتبطين خطياً .

5) (a) الشعاعان $\vec{n}_P\,(2,1,-1)$ و $\vec{n}_Q\,(1,-1,2)$ غير مرتبطين خطياً لعدم تناسب مركباتهما

إذن المستويان P و Q متقاطعان بمستقيم فصل مشترك .

نعوض معادلات d في P : $2(t)+(12-5t)-(4-3t)-8=8-8=0$ ومنه $d\subset P$

نعوض معادلات d في Q : $(t)-(12-5t)+2(4-3t)+4=-4+4=0$ ومنه $d\subset Q$

إذن : المستقيم d هو الفصل المشترك للمستويين P و Q .

<u>طريقة ثانية</u> : نحل جملة معادلتي المستويين حلاً مشتركاً فنجد تمثيل وسيطي للفصل المشترك يطابق d

(b) تنتمي $M\,(x,y,z)$ إلى المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[BC]$ إذا وفقط إذا كان :

$$BM=CM\Leftrightarrow BM^2=CM^2$$

$$(x-3)^2+(y-2)^2+(z-0)^2=(x-0)^2+(y-2)^2+(z+1)^2$$

ومنه : $-6x+13=2z+5$

إذن معادلة المستوي المحوري : $3x+z-4=0$

<u>طريقة ثانية</u> : نحسب إحداثيات منتصف $[BC]$ والشعاع $\overrightarrow{BC}$ الناظم على المستوي ثم نكتب معادلته .

نعوض معادلات d بمعادلة المستوي المحوري : $3(t)+(4-3t)-4=4-4=0$ محققة

إذن : المستقيم d محتوى في المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[BC]$.