رياضيات ١

تمارين

د. رائية

# التمارين المحلولة

1- احسب النهايات التالية بدون استخدام إزالة عدم تعين.

1)

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-3x+2}$$

الحل:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-1)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{x-1}=4$$

2)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt[3]{x^3+10}}$$

الحل:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt[3]{x^3+10}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x.\sqrt[3]{1+\frac{10}{x^3}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{1+\frac{10}{x^3}}}=1$$

3) احسب النهاية التالية:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$$

الحل:

نفرض $1+x=y^6$ نلاحظ أنه عندما $x\to 0$ فإن $y\to 1$

وبالتالي:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1} = \lim_{y \to 1} \frac{y^3-1}{y^2-1} =$$

$$= \lim_{y \to 1} \frac{(y-1)(y^2+y+1)}{(y-1)(y+1)} =$$

$$= \lim_{y \to 1} \frac{(y^2+y+1)}{(y+1)} = \frac{3}{2}$$

(4

$$\lim_{x \to a^+} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}$$

الحل:

$$\lim_{x \to a} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a} = \lim_{x \to a} \frac{x-a}{(x-a)(\sqrt{x}+\sqrt{a})} =$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}} \qquad , \ a > 0$$

(5

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x+1}{2x+1}\right)^{x^2}$$

الحل:

نعلم بأن:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x+1}{2x+1} = \frac{1}{2} \qquad , \qquad \lim_{x \to \infty} x^2 = \infty$$

$$\lim_{y \to \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{y} = 0$$

بالتعويض نحصل على:

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x+1}{2x+1}\right)^{x^2} = 0$$

6) احسب النهاية من اليمين ومن اليسار للتابع التالي:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{2-2^{\frac{1}{x}}}$$

**الحل:**

في البداية لدينا:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \quad , \quad \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

وبالتالي النهاية من اليمين:

$$\lim_{x \to 0^+} 2^{\frac{1}{x}} = 2^{\lim_{x \to 0+0} \left(\frac{1}{x}\right)} = +\infty$$

والنهاية من اليسار تساوي:

$$\lim_{x \to 0^-} 2^{\frac{1}{x}} = 2^{\lim_{x \to 0-0} \left(\frac{1}{x}\right)} = 0$$

وأخيراً:

$$\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{2-2^{\frac{1}{x}}}\right) = 0 \quad , \quad \lim_{x \to 0^-} \left(\frac{1}{2-2^{\frac{1}{x}}}\right) = \frac{1}{2}$$

2-ادرس استمرار التابع التالي موضحاً ذلك بالرسم:

$$f(x) = \frac{x^2 + \sin x}{2^x + 1}$$

**الحل:**

إن التوابع التالية:

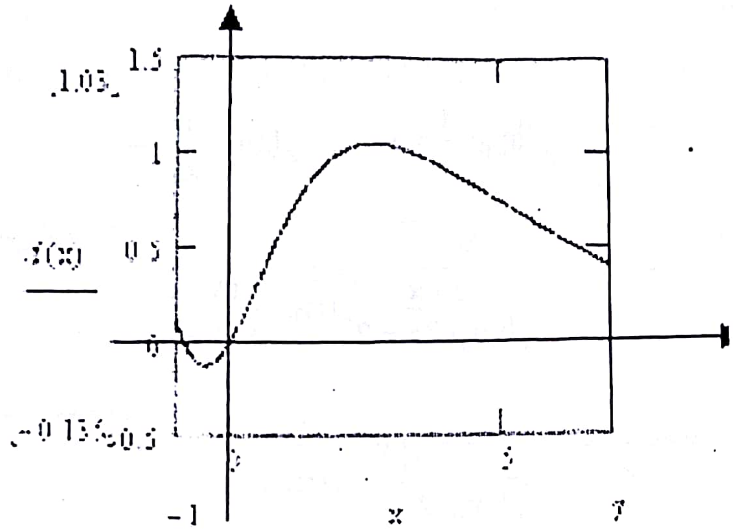
$$f_1(x) = x^2 \ , \ f_2(x) = \sin x \quad , \quad f_3(x) = 2^x + 1$$

معرفة ومستمرة على R، وباستخدام النظرية في العمليات على التوابع المستمرة مع ملاحظة أن $\forall x \in R \ , \ f_3(x) \neq 0$

فإن التابع:

$$f(x)=\frac{x^2+\sin x}{2^x+1}$$

مستمر على R.والشكل التالي يوضح ذلك:




3- ادرس استمرار التابع التالي موضحاً ذلك بالرسم

$$f(x)=\begin{cases}-x & , \quad x\le 0\\ \sin x & , \quad 0<x\le\pi\\ (x-\pi)^2 & , \quad \pi<x\end{cases}$$

الحل:

إن التابع f(x) معرف على R ، كما أنه مستمر على المجال $(-\infty,0)$ لأن f(x) معرف على هذا المجال بالشكل $f(x)=-x$ وهو يمثل كثيرة حدود من الدرجة الأولى، كما أنه مستمر على المجال $(0,\pi)$،لأن f(x) معرف على هذا المجال بالشكل $f(x)=\sin x$ وهو تابع مستمر على R وبالتالي مستمر على أي مجال نصف مفتوح من R ، كما أنه مستمر على المجال $(\pi,+\infty)$،لأن f(x) معرف على هذا المجال بالشكل $f(x)=(x-\pi)^2$ وهو يمثل كثيرة حدود من الدرجة الثانية. وبالتالي لدراسة استمرار التابع f(x) يجب دراسة استمراره عند النقطتين 0 ، π لأنه يغير التابع f(x) عندها صيغته التحليلية.

ولدراسة استمراره عند النقطة 0 :

نحسب نهاية التابع من اليمين واليسار عند الصفر وقيمة التابع عندها .

$$f(0)=0 \quad ، \quad \lim_{x\to 0-0} f(x)=0 \quad ، \quad \lim_{x\to 0+0} f(x)=0$$

و بما أن:

$$\lim_{x\to 0-0} f(x)=f(0)=\lim_{x\to 0+0} f(x)=0$$

فإن التابع f(x) مستمر عند النقطة $x = 0$ لأن النهاية من اليمين تساوي النهاية من اليسار تساوي قيمة التابع عندها.

ولدراسة استمراره عند النقطة $x=\pi$ :

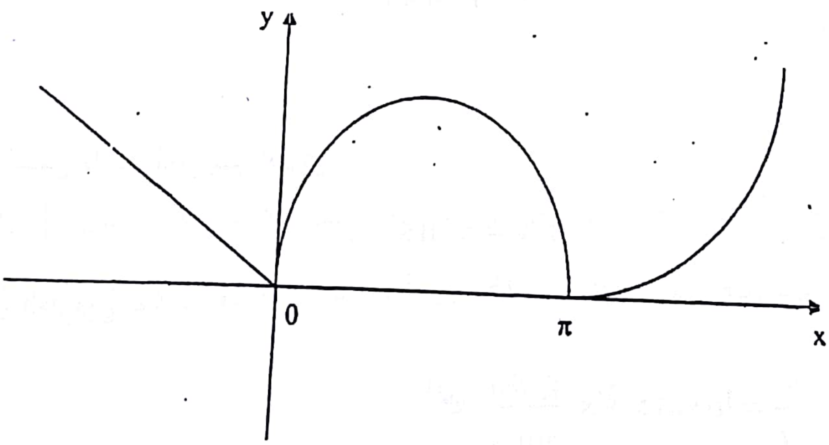
نحسب نهاية التابع من اليمين واليسار عند $x=\pi$ وقيمة التابع عندها .

$$f(\pi)=0 \quad \lim_{x\to \pi-0} f(x)=0 \quad ، \quad \lim_{x\to\pi+0} f(x)=0$$

و بما أن:

$$\lim_{x\to\pi+0} f(x)=f(\pi)=\lim_{x\to\pi+0} f(x)=0$$

فإن التابع f(x) مستمر عند النقطة $x=\pi$ لأن النهاية من اليمين تساوي النهاية من اليسار تساوي قيمة التابع عندها. كما هو موضح بالشكل التالي:




4- أوجد مشتق التابع التالي:

$$y=(x^2-2x+3)^5$$



Scanned by CamScanner

الحل:

لإيجاد المشتق نضع :

$y = u^5$ حيث إن $u = x^2 - 2x + 3$

باستخدام نظرية اشتقاق التوابع المركبة نجد:

$$y' = \left(u^5\right)_u \cdot \left(x^2 - 2x + 3\right)_x = (5u^4).(2x-2) = 10(x-1).\left(x^2 - 2x + 3\right)^4$$

5- أوجد مشتق التابع التالي:

$$y = \sin^3 4x$$

الحل:

لإيجاد المشتق نضع :

$y = u^3$ حيث أن $u = \sin v$ و $v = 4x$

باستخدام نظرية اشتقاق التوابع المركبة نجد:

$$y' = \left(u^3\right)_u \cdot (\sin v)_v \cdot (4x)_x = (3u^2).(\mathrm{cox}\, v).(4) = 12\sin^2 4x \cos 4x$$

6- أوجد مشتق التابع التالي:

$$y = (\sin x)^x$$

الحل:

لإيجاد المشتق نأخذ لغاريتم الطرفين:

$$\ln y = x.\ln \sin x$$

باشتقاق الطرفين نجد:

$$\frac{y'}{y} = \ln \sin x + x.\frac{\cos x}{\sin x} \Rightarrow$$

$$y' = y.\left(\ln \sin x + x.\frac{\cos x}{\sin x}\right) = (\sin x)^x .(\ln \sin x + x.\mathrm{cotg}\, x)$$

7- أوجد مشتق التابع التالي:

$$y=\sqrt[3]{x^2}\cdot\frac{1-x}{1+x^2}\cdot\sin^3 x\cdot\cos^2 x$$

الحل:

لإيجاد المشتق نأخذ لغاريتم الطرفين:

$$\ln y=\frac{2}{3}\ln x+\ln(1-x)-\ln\left(1+x^2\right)+3\ln\sin x+2\ln\cos x$$

باشتقاق الطرفين نجد:

$$\frac{y'}{y}=\frac{2}{3x}+\frac{-1}{1-x}-\frac{2x}{1+x^2}+\frac{3\cos x}{\sin x}-\frac{2\sin x}{\cos x}\Rightarrow$$

$$y'=y\cdot\left(\frac{2}{3x}-\frac{1}{1-x}-\frac{2x}{1+x^2}+3\cot g\,x-2\operatorname{tg}x\right)$$

$$=\left(\sqrt[3]{x^2}\cdot\frac{1-x}{1+x^2}\cdot\sin^3 x\cdot\cos^2 x\right)\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{2}{3x}-\frac{1}{1-x}-\frac{2x}{1+x^2}+3\cot g\,x-2\operatorname{tg}x\right)$$

8- ليكن لدينا التابع التالي:

$$f(x)=x-x^3$$

حقق نظرية رول للتابع على المجالين $[-1,0]$ و $[0,1]$ ثم أوجد النقطة $\alpha$ الواردة في النظرية.

الحل:

إن التابع $f(x)=x-x^3$ معرف ومستمر على المجالين المغلقين $[-1,0]$ و $[0,1]$، وقابلٌ للاشتقاق على كلاً من المجالين المفتوحين $(-1,0)$ و $(0,1)$. بما أن:

$$f(-1)=f(0)=f(1)=0$$

فحسب نظرية رول توجد نقطة واحدة على الأقل $\alpha_1\in(-1,0)$ و نقطة واحدة على الأقل $\alpha_2\in(0,1)$ بحيث يكون:

$$f'(\alpha)=1-3\alpha^2=0\Rightarrow\alpha_1=-\frac{1}{\sqrt{3}}\ ,\ \alpha_2=+\frac{1}{\sqrt{3}}$$

وبالتالي فإن $\alpha_1=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ في المجال المفتوح $(-1,0)$. و $\alpha_1=\frac{1}{\sqrt{3}}$ في المجال المفتوح $(0,1)$.

9- ليكن لدينا التابع التالي:

$$f(x)=x-x^3$$

حقق نظرية لاغرانج للتابع على المجال $[-2,1]$ ، ثم أوجد النقطة $\alpha$ الواردة في النظرية.

**الحل:**

إن التابع $f(x)=x-x^3$ معرف ومستمر على المجال المغلق $[-2,1]$، وهو قابلاً للاشتقاق على المجال المفتوح $(-2,1)$.

فحسب نظرية لاغرانج توجد نقطة واحدة على الأقل $\alpha_1\in(-2,1)$ بحيث يكون:

$$\frac{f(1)-f(-2)}{[1-(-2)]}=f'(\alpha)$$

ولكن

$$f'(x)=1-3x^2 \quad \text{و} \quad f(-2)=6 \quad , \quad f(1)=0$$

وبالتالي:

$$\frac{-6}{3}=1-3\alpha^2 \Rightarrow$$
$$\alpha^2=1\Rightarrow \alpha=\mp 1$$

وبما أن:

$$1\notin(-2,1) \quad \text{و} \quad -1\in(-2,1)$$

فإذن النقطة المطلوبة هي $\alpha=-1$ .

10- احسب النهاية التالية:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)$$

**الحل:**

لدينا حالة عدم تعين من الشكل $\infty-\infty$ لتطبيق نظرية لوبيتال يجب ردهـا إلى أحد الشكلين الأساسيين . لدينا :

$$\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}=\frac{x-1-\ln x}{(x-1).\ln x}$$

ومنه:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{x-1-\ln x}{(x-1).\ln x}=\frac{0}{0}$$

بتطبيق نظرية لوبيتال مع ملاحظة أن كلا التابعين:

$$x-1-\ln x \qquad , \qquad (x-1).\ln x$$

يحققان شروط النظرية وبالتالي :

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1-\ln x}{(x-1).\ln x}=\lim_{x\to 1}\frac{1-\frac{1}{x}}{\ln x+\frac{x-1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x\ln x+x-1}$$

حصلنا على حالة عدم تعين مرة ثانية من الشكل $\frac{0}{0}$ لذلك نطبق لوبيتال مرة ثانيـة فنحصل على:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\ln x+1+1}=\frac{1}{2}$$

11- احسب النهاية التالية:

$$\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}$$

الحل:

لدينا حالة عدم تعين من الشكل $1^{\infty}$. لتطبيق نظرية لوبيتال يجب ردهــا أولاً إلى أحد الشكلين الأساسيين ولذلك نضع:

$$y=(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}$$

ونأخذ لغاريتم الطرفين نحصل على:

$$\ln y=\frac{3\ln[\cos 2x]}{x^2} \quad , \quad 0<\cos 2x$$

ومنه:

$$\lim_{x\to 0}\ln y=\lim_{x\to 0}\frac{3\ln[\cos 2x]}{x^2}=\frac{0}{0}$$

بتطبيق نظرية لوبيتال مع ملاحظة أن كلا التابعين:

$$3\ln\cos 2x \qquad , \qquad x^2$$

يحققان شروط النظرية وبالتالي :

$$\lim_{x\to 0}\frac{3\ln[\cos 2x]}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-6tg2x}{2x}=\frac{0}{0}$$

بتطبيق لوبيتال مرة ثانية نحصل على:

$$\lim_{x\to 0}\frac{-6tg2x}{2x}=-6$$

وبالتالي:

$$\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}=e^{-6}=\frac{1}{e^6}$$

12- احسب النهاية التالية:

$$\lim_{\substack{x\to -1\\ y\to 0}} f(x,y)=\ln(4+x^2+y^2)$$

إن ساحة تعريف التابع هي المستوي xoy ، وبالتالي فهو معــرف في جــوار النقطة $(-1,0)$ ،ونهايته عندما $(x,y)$ تسعى إلى $(-1,0)$ تساوي $\ln 5$ .

13- أوجد المشتقات الجزئية من المرتبة الأولى للتابع:

$$u = f(x,y) = x^3 + \sin(2x + y^2)$$

والمشتقات التالية $u_{xxy}$ , $u_{xx}$

الحل:

إن المطلوب هو حساب المشتقات التالية :

$$u_x \quad , \quad u_y \quad , \quad u_{xx} \quad , \quad u_{xxy}$$

إن ساحة تعريف التابع هي جميع نقاط المستوي xoy.

المشتق الجزئي بالنسبة لـ x باعتبار y مثبته هو:

$$u_x = 3x^2 + 2\cos(2x + y^2)$$

أما المشتق الجزئي بالنسبة لـ y باعتبار x مثبته هو:

$$u_y = 2y.\cos(2x + y^2)$$

لإيجاد المشتق الجزئي الثاني بالنسبة لـ x باعتبار y مثبته نشتق $u_x$ بالنسبة لـ x فنجد أن :

$$u_{xx} = 6x - 4\sin(2x + y^2)$$

أخيراً فإنه لإيجاد المشتق الجزئي $u_{xxy}$ ، نشتق جزئياً $u_{xx}$ بالنسبة y باعتبار x مثبته فنجد أن:

$$u_{xxy} = -8y.\cos(2x + y^2)$$

3MA