



مناهج عربية

[arabeducationsite.com](http://arabeducationsite.com)

# نهايات و دالة شتقا

الرياضيات (١) طلاب السنة الأولى ميكاترونكس إلكترون تحكم تمارينه د. سمس

٢٧

الجزء (٢)

## تمارين غير محلولة

التمرين الأول: احسب كل من المقادير التالية :

$$1) (-1+i)^7$$

$$2) \sqrt[4]{-i}$$

$$3) (1+i)^n + (1-i)^n$$

$$4) \frac{(2+i)^2}{3-4i}$$

$$5) \left( \frac{2+i}{3-2i} \right)^2$$

$$6) \left( \frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i} \right)^4 \left( \frac{1+i}{1-i} \right)^5$$

$$7) \sqrt[4]{-1+i}$$

$$8) \sqrt[4]{1+i\sqrt{3}}$$

$$9) (1+i\sqrt{3})^{10}$$

التمرين الثاني: اثبت أن ما يلي صحيح:

$$\sin 3\theta = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta$$

$$\cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$$

التمرين الثالث:

أوجد نهايات التوابع التالية:

$$1) \lim_{x \rightarrow \pm 1} \frac{1}{x^2 - 1}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{\sin 5x}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{2x^2 + 3}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+a} - \sqrt{x})$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x^3 - 3x + 1}{x - 4} + 1 \right)$$

$$7) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x}{x^4 - 3x^2 + 1}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 5x}{x^2 - 3x + 1}$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^2} \right)$$

$$10) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 5}{x^2 - 3}$$

$$11) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^3}{x^2 + 1} - x \right)$$

$$12) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1} \right)$$

$$10) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{1-x}$$

$$11) \lim_{x \rightarrow \infty} x \left( \sqrt{x^2 + 1} - x \right)$$

$$15) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^3}{2x^2 - 1} - \frac{x^2}{2x + 1} \right)$$

$$16) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{\sqrt[3]{8x^3 + x}}$$

$$17) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-1}{x+3} \right)^{x+2}$$

$$18) \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - (a+1)x + a}{x^3 - a^3}$$

$$19) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x}{1+x} \right)^x$$

$$17) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x^3 + 2x}$$

$$18) \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} \left( \sqrt{x+1} - \sqrt{x} \right)$$



التمرين الرابع:

أوجد مشتق من المرتبة الأولى لكل من التوابع التالية:

$$1) x^2 \cos x$$

$$2) a^{2x} + \ln(\sin x^2)$$

$$3) \frac{\arctan \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

$$4) e^x \sin x$$

$$5) e^x \sqrt{x^3 + 2}$$

$$6) (\cos x + \sin x) \ln x$$

$$7) x^3 e^{2x}$$

$$8) x^2 \arcsin x$$

$$9) e^x \arccos x$$

$$10) y = x^{\arcsin x}$$

$$11) y = x^{\sin x}$$

$$12) y = (\sin x)^x$$

$$13) y = (\arccos x)^x$$

$$14) y = \frac{1}{\sqrt{x+e^x}}$$

$$15) y = x^{2x} + \ln(\sin x^2)$$

$$16) y = (\sin x)^{\cos x} + e^x \arcsin x$$

$$17) y = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x+1}{\sqrt{x^2 - x + 1}} \right| + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \left( \frac{2x-1}{\sqrt{3}} \right)$$

التمرين الخامس:

١) أوجد مشتق من المرتبة الأولى الثانية للتابع التالي:

$$f(x) = \frac{x \cos x + e^x \ln x}{x}$$

$$f(x) = e^x + x \cos x$$

٢) أوجد المشتق الرابع للتابع التالي:

$$f(x) = \frac{x \ln x}{x^2 + 1}$$

$$f(x) = (x^2 + 1) \arctan x$$

٤) أوجد المشتق الثاني للتابع التالي:

٣) أوجد المشتق الثاني للتابع التالي:

التمرين السادس:

أوجد مشتق التوابع الضمنية التالية:

$$1) x = \cos(x \cdot y)$$

$$2) x + y = e^x + e^y$$

$$3) x^3 + y^3 - 3axy = 0$$

$$4) x = \arctan(x + y)$$

$$5) e^{x+y} = \sinh(x + y)$$

$$6) \ln(x \cdot y) = x + y$$



### تطبيقات الاشتغال:

### قاعدة أوبيتال في إيجاد النهايات:

سندرس إزالة حالي عدم التعين عندما تكون من أحد الشكلين  $\frac{0}{0}$  أو  $\frac{\infty}{\infty}$ ، تدعى هذه الطريقة بطريقة أوبيتال

لإزالة حالات عدم التعين، ثم نناقش حالات عدم التعين من أشكال مختلفة مثل:  $1^{\infty}, \infty - \infty, 0 \cdot \infty, \infty^0, 0^0$

والتي ترد إلى حالة عدم التعين من أحد الشكلين  $\frac{0}{0}$  أو  $\frac{\infty}{\infty}$ .

### نظرية أوبيتال:

ليكن  $f(x)$  و  $g(x)$  تابعين معرفين على مجال جزئي من  $\mathbb{R}$  وإذا كان:  $0 = f(x) = g(x)$

أو  $\infty = f(x) = g(x)$  وبحيث أن  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  موجودة فإن ما يلي صحيحاً:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

### ملاحظة (١):

إذا كان  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f''(x)}{g''(x)}$  موجود فان  $\lim_{x \rightarrow a} f'(x) = \lim_{x \rightarrow a} g'(x) = \beta$  وبحيث أن  $0 = \beta = \infty$  وإذا كان

قاعدة أوبيتال تبقى صحيحة:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f''(x)}{g''(x)}$$

ويمكن تعميم ذلك إذا كان  $\lim_{x \rightarrow a} f^{(n-1)}(x) = \lim_{x \rightarrow a} g^{(n-1)}(x) = \gamma$  أو  $\gamma = \infty$  وإذا كان

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f^{(n-1)}(x)}{g^{(n-1)}(x)}$  موجود فان قاعدة أوبيتال تبقى صحيحة:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \dots = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$



## تمارين غير محلولة على قاعدة لوبیتال

التمرين الأول: استخدم قاعدة لوبیتال في إيجاد نهاية كلًّا مما يأتي:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x \cos x}{x - \sin x}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 1} \left[ \frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right]$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} x^x$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x$$

$$6) \lim_{x \rightarrow \infty} x e^{-x}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{2}{x^2 - 1} - \frac{1}{x-1} \right)$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - \ln(x+e)}{\arcsin x}$$

$$10) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{3/x^2}$$

$$11) \lim_{x \rightarrow 0} (x-1)^{\ln x}$$

$$12) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\tan x}$$

$$13) \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right]$$

$$14) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \cot^2 x - \frac{1}{x^2} \right)$$

$$15) \lim_{x \rightarrow 1} x^{1/(1-x)}$$

$$16) \lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \tan \left( \frac{\pi x}{2} \right)$$

$$17) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right)$$

$$18) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left[ \tan x - \frac{1}{1-\sin x} \right]$$

$$19) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$$

$$20) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^4}$$

$$21) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln^2(1+2x) - \sin^2 3x}{1 - e^{-x^2}}$$

$$22) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \right)^x$$

$$23) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cos x e^{\tan x}$$

$$24) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sin x} \right)^{\sin x}$$

$$25) \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}$$

$$26) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \arcsin x}{3x}$$

$$27) \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right)$$

$$28) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{\arcsin x - x}$$

$$29) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \cos(1/x)}{\ln(1+x)}$$

$$30) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{1/x^2} - 1}{2 \arctan x^2 - \pi}$$

$$31) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh x}{\ln(e-x) + x - 1}$$

$$32) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sinh x - 2x}{x - \sin x}$$

$$33) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$$

$$34) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi \cos x)}{x \sin x}$$

$$35) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\frac{\pi}{2} \cos x)}{\sin^2 x}$$

$$36) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e - (1+x)^{1/x}}{x}$$

$$37) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x - \sin x}$$

$$38) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right|$$

$$39) \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left| \frac{1+x}{x-1} \right|$$

$$40) \lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$$

$$41) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+x e^{2x})}{x^2}$$

$$42) \lim_{x \rightarrow 1} x^{1/x}$$

$$43) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+e^{2x})}{x}$$

$$44) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arcsin x}{\sin^2 x}$$

$$45) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x}$$



تمارين رياضيات  
دشتي

جزء  
(١)

### تمارين غير م حلولة على السلال العددية

#### التمرين الأول:

بين طبيعة كل من السلال العددية التالية:

$$1) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{3^n - 1}$$

$$2) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+1)!}{10^n}$$

$$3) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n-1)^3}{n!}$$

$$4) \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{n}{2n+1} \right)^n$$

$$5) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

$$6) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n 3^n}$$

$$7) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{1 + 2^{2n}}$$

$$8) \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{3n+2}{2n+3} \right)^n$$

$$9) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n n!}{(2n)!}$$

$$10) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)!}$$

$$11) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2 - 1}$$

$$12) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{e^n}}$$

$$13) \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{n}{n+1} \right)^{n^2}$$

$$14) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$$

$$15) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1-3^n}{3^n (n+1)}$$

$$16) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 - n}{(n+1)!}$$

$$17) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5^n n!}{(5n)!}$$

$$18) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n + 5^n}{7^n}$$

$$19) \sum_{n=1}^{+\infty} 2^n \left( \frac{n+1}{n} \right)^{n^2}$$

$$20) \sum_{n=1}^{+\infty} \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right)$$

$$21) \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{3n+1}{5n+2} \right)^n$$

$$22) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n+1}$$

$$23) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)!}$$

$$24) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n + 5}{3^n}$$

$$25) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n^4}$$

$$26) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n}$$

$$27) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{n}$$

#### التمرين الثاني:

بين طبيعة كل من السلال العددية التالية:

$$1) \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \left( \frac{n}{2n+1} \right)^n$$

$$2) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} n^2}{n^4 + 1}$$

$$3) \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1}$$

$$4) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{n^2 + 1}$$

$$5) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1) 3^n}$$

$$6) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

$$7) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n^2} (-1)^{n+1}$$

$$8) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$$

$$9) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+3}{n} (-1)^{n+1}$$

$$10) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n (-1)^{n+1}}{4n^2 - 3}$$

$$11) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n (-1)^{n+1}}{4n-3}$$

$$12)$$

#### التمرين الثالث:

أوجد مجموع كل من السلال العددية التالية:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n + 5}{3^n}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{3^n}{4^n} - \frac{2^n}{5^n} \right)$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n 3^n + 7^n}{14^n}$$

