

مناهج عربية

arabeducationsite.com

Date : / /

Subject: 2019/10/24 الخميس

تعريف: نقول عن تابع $f(x)$ انه مستمر من اليمين عند a (مستمر من اليسار عند a) إذا تحقق الشرط:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a) \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

ملاحظة: يكون التابع $f(x)$ مستمراً على مجال مغلق $[a,b]$ إذا كان:

* مستمراً على المجال $]a,b[$
* مستمراً من اليسار عند b ومستمراً من اليمين عند a.

مثال: ادرس استمرار التابع.

① $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|e^x}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x e^x}{x} = e^0 = 1 = f(0)$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{x e^x}{x} = -1$$

إذاً التابع مستمر فقط من اليمين عند $x=0$

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & x < -1 \\ x^2 - 1 & x \geq -1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = (-1) + 1 = 0$$

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = (1) - 1 = 0$$

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^+} f(x) = f(-1)$$

والتابع مستمر عند $x=-1$

خواص الاستمرار:

① إذا كان f تابعاً مستمراً عند النقطة x_0 وكان $f(x_0)$ موجباً تماماً (سالباً تماماً) فإن التابع f يكون موجباً (سالباً) على جوار ما للنقطة x_0 أي يوجد δ بحيث يكون $f(x)$ موجباً (سالباً) أياً يكن x من $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$

ملاحظة: إذا كان $f(x)$ معرفاً في جوار النقطة x_0 لكنه غير مستمر عند x_0 فإن التابع $f(x)$ قد يحافظ على إشارته في أي جوار للنقطة x_0

Sabbagh

Scanned by CamScanner

Date : / / Subject:

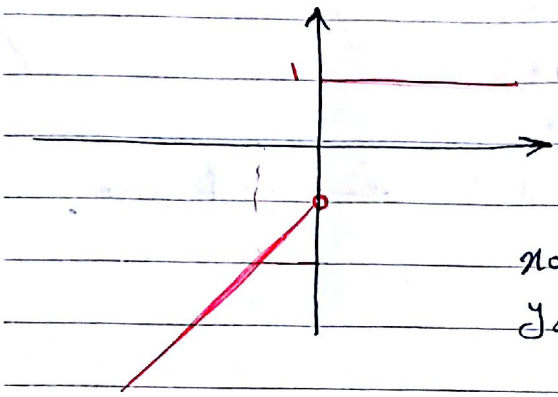
مثال:

$$f(x)=\begin{cases} x-1 & x<0 \\ 1 & x\geq 0 \end{cases}$$

بما أن f غير مستمر عند $x=0$ وعلى الرغم أن $f(0)=1$ موجب فإنه لا يوجد أي جوار للصفر بحيث يكون f موجباً على هذا الجوار.

$f(0)=1$

يلزمنا نقطتين لرسم المستقيم.



$f(x)=y$

الخاصة الثانية: ② إذا كان f تابعاً مستمراً عند x_0 وكان $g(y)$ تابعاً مستمراً عند $y_0=f(x_0)$ فإن $g\circ f$ يكون مستمراً عند x_0

③ التابع العكسي (إن وجد) لتابع مستمر هو تابع مستمر أيضاً.

* أمثلة:

التابع $e^{\cos x}$ معرف ومستمر على $\mathbb{R}$

التابع $\sin\left(\frac{1}{(1-x)^2}\right)$ مستمر على $\mathbb{R}\setminus\{1\}$

● خواص الاستمرار على مجال مغلق:

إذا كان $f(x)$ تابعاً مستمراً على مجال مغلق $[a,b]$ فإن:

كل تابع مستمر على مجال مغلق هو تابع محدود وبالتالي يوجد عددين m,M بحيث:

$$\forall x\in[a,b] \quad m\leq f(x)\leq M$$

التابع المستمر على المجال المغلق يأخذ جميع القيم الواقعة بين حدي الاحتمال وحيدة الأدنى

صة: إذا كان $f(a).f(b)<0$ فإنه يوجد $x_0\in\,]a,b[$ بحيث $f(x_0)=0$

Scanned by CamScanner

Date : / /

Subject: .....

مثال: عين قيمة m في كل من الحالتين حتى يكون التابع $f(x)$ مستمراً عند $x=0$.

$$f(x)=\begin{cases}\cos\frac{1}{x} & ; \ x\neq 0\\ m & ; \ x=0\end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}$ غير موجودة غير معرفة

، ومنه f غير مستمر عند 0.

$$f(x)=\begin{cases}x^2\cos\frac{1}{x} & ; \ x\neq 0\\ m & ; \ x=0\end{cases}$$

$$-1\leq \cos\frac{1}{x}\leq 1$$

$$-x^2\leq f(x)\leq x^2 \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x)=0$$

حتى يكون التابع f مستمراً عند $x=0$ يجب أن يكون

$$\lim_{x\to 0} f(x)=f(0) \Rightarrow \boxed{m=0}$$

Scanned by CamScanner

Date : / /

Subject :

★ الاشتقاقية :

• ليكن لدينا تابع $y = f(x)$ معرف في جوار للنقطة x_0 إذا كانت النهاية

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

موجودة ومحدودة فإن النهاية تسمى : مشتق التابع f عند النقطة x_0 ونرمز لها بـ $f'(x_0)$ أي يكون

$$f'(x_0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

ويكون التابع f قابلاً للاشتقاق على المجال $]a,b[$ إذا كان قابلاً للاشتقاق في كل نقطة من نقاط المجال.

★ المعنى الهندسي للمشتق :

ليكن $y = f(x)$ تابعاً قابلاً للاشتقاق x_0 فإن النهاية $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ موجودة ومحدودة وتساوي ظل زاوية المماس للتابع في تلك النقطة ويكون $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ معادلة المماس لمنحني التابع عند x_0.

قواعد الاشتقاق :

إذا كان f, g تابعين قابلين للاشتقاق عند x_0 فإن التوابع $f+g$ و $f \cdot g$ و $\frac{f}{g}$ حيث $(g(x) \neq 0)$ توابع قابلة للاشتقاق عند x.

* $[f+g]' = f'(x) + g'(x)$

* $(f \cdot g)' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) f(x)}{[g(x)]^2}$$

Scanned by CamScanner

Date : / /

Subject:

• مشتقات بعض التوابع الأساسية الهامة:

التابع	المشتق
$y = c$	$y' = 0$
$y = x^n \quad n \in \mathbb{N}$	$y' = nx^{n-1}$
$y = x^\alpha \quad \alpha \in \mathbb{R}$	$y' = \alpha x^{\alpha-1}$
$y = a^x \quad a > 0$	$y' = a^x \ln(a)$
$y = e^x$	$y' = e^x$
$y = \ln\lvert x\rvert$	$y' = \frac{1}{x}$
$y = \log_a \lvert x\rvert \quad x > 0$	$y' = \frac{1}{x \ln(a)}$
$y = \sin x$	$y' = \cos x$
$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
$y = \tan x$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$
$y = \cot x$	$y' = \frac{-1}{\sin^2 x}$

التابع	المشتق
$y = \text{arc}\sin x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = \text{arc}\cos x$	$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = \text{arc}\tan x$	$y' = \frac{1}{1+x^2}$
$y = \text{arc}\cot x$	$y' = \frac{-1}{1+x^2}$
$y = \text{sh}(x)$	$y' = \text{ch}(x)$
$y = \text{ch}(x)$	$y' = \text{sh}(x)$

Sabbagh

Scanned by CamScanner

Date : / /

Subject:

التابع	المشتق
$y = th(x)$	$y' = \frac{1}{ch'(x)}$
~~$y = ch(x)$~~	
$y = cth(x)$	$y' = -\frac{1}{sh^2(x)}$
$y = arc\ sh(x)$	$y' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$y = arc\ ch(x)$	$y' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$y = arcth(x)$	$y' = \frac{1}{1-x^2}$
$y = arg\ cth(x)$	$y' = ??$ وظيفة

Scanned by CamScanner

Date : / /

Subject:

مشتقة التابع المركب:

* إذا كان $y = f(u)$ حيث $u = f(x)$ وكان كل من f, u تابعين قابلين للاشتقاق فإن:

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x$$

* نتيجة:

- $[\ln(u(x))]' = \frac{u'(x)}{u(x)}$
- $[e^{u(x)}]' = u'(x)\, e^{u(x)}$

أمثلة: أوجد مشتقة كل من التوابع الآتية:

① $y = x^3 \ln(x) + \frac{x^3}{3} \Rightarrow y' = 3x^2 \ln(x) + \frac{1}{x} \cdot x^3 + x^2$

$= 3x^2 \ln(x) + 2x^2$

② $f(x) = [1+3x^2]^6 \Rightarrow f'(x) = 6(6x)[1+3x^2]^5$

$= 36x(1+3x^2)^5$

③ $f(x) = \ln(\cos(e^{-2x})) \Rightarrow f'(x) = \frac{[\cos(e^{-2x})]'}{\cos e^{-2x}}$

$= \frac{+2e^{-2x} \sin(e^{-2x})}{\cos e^{-2x}} = 2e^{-2x} \tan(e^{-2x})$

④ $f(x) = x^x = e^{x \ln(x)}$

$f'(x) = [x \ln x]' e^{x \ln x} = [\ln(x) + 1]\, x^x$

* مشتقة التابع العكسي:

- إذا كان $f(x)$ تابعاً تقابلياً وكان f قابلاً للاشتقاق عند x_0 فإن f^{-1} يكون قابلاً للاشتقاق عندما $y_0 = f(x)$ ويكون

$$[F^{-1}]' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Sabbagh

Scanned by CamScanner

Date : / /

Subject

* مثال: أوجد مشتقة

$$y = \arcsin x$$

$$y' = \frac{1}{[\sin(y)]'} = \frac{1}{\cos(y)}$$

$$\sin(y) = x \Rightarrow \cos(y) = \sqrt{1-x^2}$$

$$\cos^2(y) + \sin^2(y) = 1 \Rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

التوقيع: محمد أمير سباغ

Scanned by CamScanner